

Dimostrazione della formula del numero minimo di denti (nell'ipotesi che i fianchi siano costituiti interamente da un tratto di evolvente):

$$z_{\min} = \frac{2,5}{1 - \cos \vartheta}$$

Sulla base dell'ipotesi fatta, la circonferenza di piede non potrà che essere esterna a quella di base, perché in caso contrario l'ipotesi verrebbe contraddetta; ci sarebbe cioè un tratto del fianco non appartenente a una evolvente di cerchio. La condizione suddetta può scriversi:

$$r_b \leq r \quad (1)$$

dove:

r_b = raggio della circonferenza di base;

r = raggio della circonferenza primitiva.

D'altronde r_b può essere espresso dalla relazione:

$$r_b = r \cdot \cos \vartheta \quad (2)$$

Il raggio della circonferenza di piede è a sua volta ricavabile, in un proporzionamento modulare normale, dalla relazione:

$$r_p = r - h_a \quad (3)$$

Se si assume per il dedendum:

$$h_a = 1,25 \cdot m \quad (4)$$

dove con m si è indicato il modulo, e ricordando che è $m = \frac{d}{z_{\text{denti}}} = \frac{2r}{z_{\text{denti}}}$, da cui:

$$r = \frac{m \cdot z_{\text{denti}}}{2} \quad (5)$$

essendo z_{denti} il numero di denti, la (1) diviene:

$$r \cdot \cos \vartheta \leq r - h_a$$

ovvero, dalla (4):

$$r \cdot \cos \vartheta \leq r - 1,25 \cdot m \quad (6)$$

In base alla (5), la (6) può scriversi:

$$\frac{m \cdot z_{\text{denti}}}{2} \cdot \cos \vartheta \leq \frac{m \cdot z_{\text{denti}}}{2} - 1,25 \cdot m$$

o anche:

$$\frac{m \cdot z_{\text{denti}}}{2} \cdot (1 - \cos \vartheta) \geq 1,25 \cdot m$$

da cui, semplificando, si ottiene:

$$z_{\min} = \frac{2,5}{1 - \cos \vartheta} \quad (7) = (19)$$

Per la determinazione del numero minimo di denti in un ingranaggio cilindrico a denti dritti, si veda anche l'Approfondimento 8 su foglio Excel.