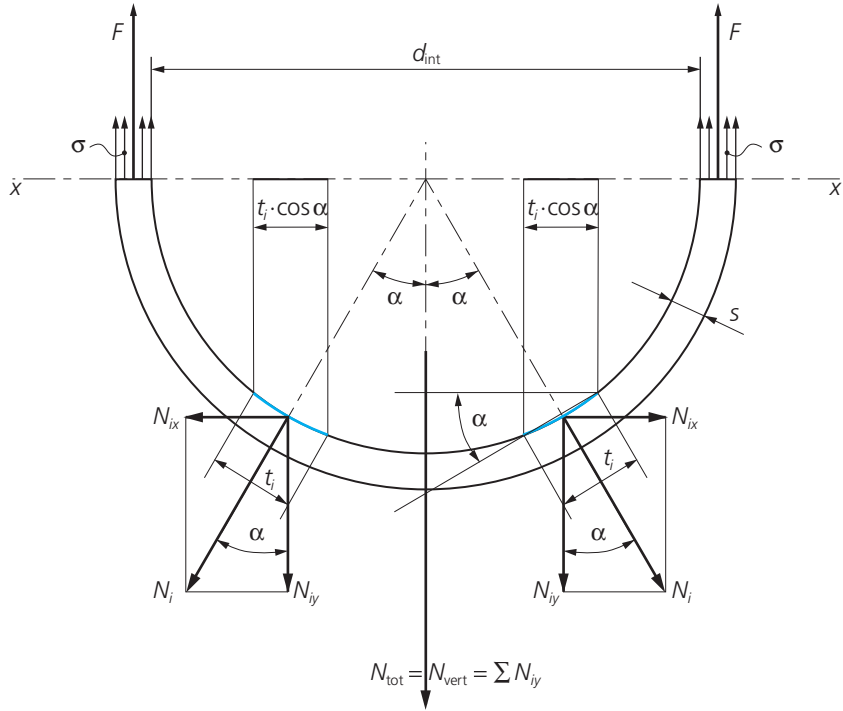


## Recipienti cilindrici soggetti a pressione interna

**Dimostrazione della formula:**  $\sigma = \frac{p \cdot d_{\text{int}}}{2 \cdot s}$

Ipotizziamo che la parete del recipiente cilindrico abbia uno spessore  $s$  piccolo rispetto al diametro  $d_{\text{int}}$ , in modo che le tensioni di trazione agenti lungo tale spessore siano distribuite uniformemente. Prendiamo in esame ad esempio la metà inferiore del tubo (**Figura 1**); questa è in equilibrio per effetto della pressione  $p$ , costante, esercitata dal fluido sulla parete interna e delle tensioni  $\sigma$  (per ipotesi, distribuite uniformemente) che la metà superiore di tubo trasmette a quella inferiore attraverso le sezioni diametrali di area  $S$ .



**Figura 1**

Recipiente cilindrico soggetto a pressione interna: schema illustrativo dei parametri geometrici e delle forze in gioco.

Detta  $l$  la lunghezza assiale del semicilindro, su ciascuna area  $S$  agisce una forza  $F$ , risultante delle tensioni  $\sigma$ , che vale:

$$F = \sigma \cdot S$$

Essendo poi:

$$S = s \cdot l$$

si ottiene:

$$F = \sigma \cdot s \cdot l \quad (1)$$

Per l'equilibrio dovrà risultare:

$$2 \cdot F = N_{\text{tot}} \quad (2)$$

dove  $N_{\text{tot}}$  indica la risultante delle forze elementari  $N_i$  che la pressione  $p$  esercita sulle aree elementari  $a_i$  di cui è costituita la superficie interna del tubo.

Se a ciascuna area elementare  $a_i$  corrisponde un arco di lunghezza  $t_i$  risulta:

$$a = t_i \cdot l \quad (3)$$

Essendo:

$$p = \frac{N_i}{a_i}$$

con  $N_i$  = forza elementare relativa all'area  $a_i$ , si ricava:

$$N_i = p \cdot a_i$$

ovvero, ricordando la (3):

$$N_i = p \cdot t_i \cdot l \quad (4)$$

La forza  $N_i$  relativa alla generica area elementare  $a_i$  risulta inclinata rispetto all'asse  $y$  dell'angolo  $\alpha$ . Le componenti di  $N_i$  lungo gli assi  $x$  e  $y$  valgono rispettivamente:

$$N_{ix} = N_i \sin \alpha \quad (5)$$

$$N_{iy} = N_i \cos \alpha \quad (6)$$

Poiché la posizione di un elemento generico come  $a_i$  è caratterizzata dal valore dell'angolo  $\alpha$ , le relazioni (5) e (6) valgono per qualsiasi superficie elementare  $a_i$ .

La somma delle  $N_{ix}$  non è altro che la componente orizzontale  $N_{orizz}$  di  $N_{tot}$ ; analogamente, la somma delle  $N_{iy}$  è la componente verticale  $N_{vert}$  di  $N_{tot}$ .

Considerando l'equilibrio del semitubo inferiore, le  $N_{ix}$ , componenti lungo l'asse  $x$  delle forze  $N_i$ , si annullano reciprocamente, essendo a due a due uguali e opposte. In altre parole, la risultante delle componenti orizzontali  $N_{orizz}$  è nulla, ovvero:

$$N_{orizz} = \sum N_{ix} = 0$$

Le componenti lungo l'asse  $y$  ammettono invece una risultante  $N_{vert}$  che vale, dalla (6):

$$N_{vert} = \sum N_{iy} = \sum (N_i \cos \alpha) \quad (7)$$

Poiché  $N_{orizz}$  è nulla,  $N_{tot}$  dovrà coincidere con la componente verticale  $N_{vert}$ . Sarà pertanto:

$$N_{tot} = N_{vert} = \sum (N_i \cos \alpha) \quad (8)$$

Dalla (4) e dalla (7) si ottiene:

$$N_{tot} = \sum (p \cdot t_i \cdot l \cdot \cos \alpha) \quad (9)$$

Essendo  $p$  e  $l$  valori costanti, la (9) può scriversi:

$$N_{tot} = p \cdot l \cdot \sum (t_i \cdot \cos \alpha) \quad (10)$$

Osserviamo che il prodotto  $(t_i \cdot \cos \alpha)$  non è altro che la proiezione di  $t_i$  sull'asse  $x$ , per cui risulta:

$$\sum (t_i \cdot \cos \alpha) = d_{int} \quad (11)$$

dove  $d_{int}$  è il diametro interno del tubo e  $\alpha$  varia da  $-90^\circ$  a  $+90^\circ$ .

La (10) diviene allora, in base alla (11):

$$N_{tot} = p \cdot l \cdot d_{int} \quad (12)$$

La condizione (2) di equilibrio, in base alla (1) e alla (12) è ora:

$$2 \cdot \sigma \cdot s \cdot l = p \cdot l \cdot d_{int}$$

ovvero:  $\sigma = \frac{p \cdot d_{int}}{2 \cdot s}$ , cioè l'espressione che volevamo dimostrare.