

## Rappresentazione grafica dei criteri di resistenza di Hencky-Huber-Von Mises, Beltrami-Huber-Haig e Guest-Tresca

A) Vogliamo ora dimostrare che l'espressione:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq \sigma_{adm} \quad (1)$$

relativa al **criterio di resistenza** formulato da **Hencky-Huber-Von Mises**,

1. ponendo:

$$\tau_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{\sqrt{3}}$$

può anche scriversi nella forma:

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_{adm}^2} + \frac{\tau^2}{\tau_{adm}^2} \leq 1 \quad (2)$$

2. e che quest'ultima espressione rappresenta, sul piano  $\sigma$ - $\tau$ , i punti interni (o, al limite, i punti appartenenti al contorno) di un'ellisse con centro nell'origine degli assi e avente per semiassi maggiore e minore rispettivamente  $\sigma_{adm}$  e  $\tau_{adm}$  (**Figura 1**).

**Figura 1**

Rappresentazione sul piano  $\sigma/\tau$  delle ellissi di equazione:  $\frac{\sigma^2}{\sigma_{adm}^2} + \frac{\tau^2}{\tau_{adm}^2} = 1$

secondo i vari criteri di resistenza:

$\tau_{adm B} = \frac{\sigma_{adm}}{\sqrt{2,5}}$  criterio di

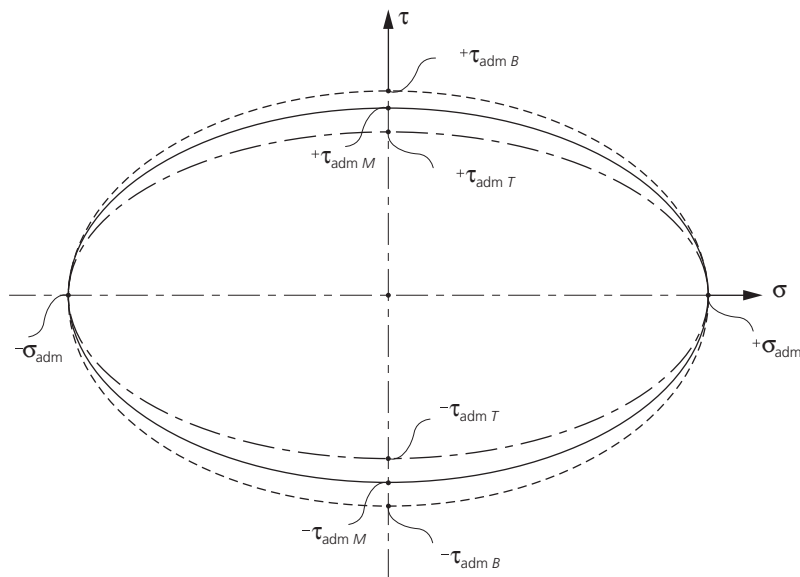
Beltrami-Huber-Haig;

$\tau_{adm M} = \frac{\sigma_{adm}}{\sqrt{3}}$  criterio di

Hencky-Huber-Von Mises;

$\tau_{adm T} = \frac{\sigma_{adm}}{2}$  criterio di

Guest-Tresca.



1. Per quanto riguarda la prima parte di questa dimostrazione, se eleviamo al quadrato entrambi i membri della relazione (1), essa diviene:

$$\sigma^2 + 3\tau^2 \leq \sigma_{adm}^2$$

Dividendo entrambi i membri per  $\sigma_{adm}^2$  si ottiene:

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_{adm}^2} + \frac{3\tau^2}{\sigma_{adm}^2} \leq 1 \quad (3)$$

Dall'espressione:

$$\tau_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{\sqrt{3}}$$

elevando al quadrato entrambi i membri e isolando  $\sigma_{adm}^2$  si ricava:

$$\sigma_{adm}^2 = 3\tau_{adm}^2 \quad (4)$$

Sostituendo la (4) nella (3) si ottiene:

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_{adm}^2} + \frac{3\tau^2}{3\tau_{adm}^2} \leq 1$$

e infine:

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_{adm}^2} + \frac{\tau^2}{\tau_{adm}^2} \leq 1$$

cioè la (2).

2. Per quanto riguarda invece la seconda parte della dimostrazione, ricordiamo che l'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

rappresenta, in un riferimento cartesiano ortogonale monometrico  $x/y$ , un'ellisse con centro nell'origine degli assi, per la quale, se è  $a^2 > b^2$ , risulta che il semiasse di lunghezza  $a$  giace sull'asse  $x$ , mentre quello di lunghezza  $b$  giace sull'asse  $y$  (Figura 2).

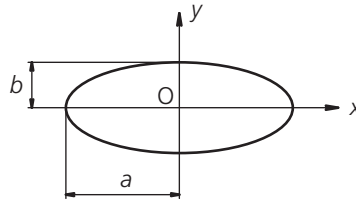


Figura 2

Da quanto detto, possiamo allora dedurre che l'espressione:

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_{adm}^2} + \frac{\tau^2}{\tau_{adm}^2} = 1$$

rappresenta, in un riferimento cartesiano ortogonale monometrico  $\sigma$ - $\tau$ , un'ellisse con centro nell'origine degli assi. Essendo inoltre:

$$\sigma^2 > \tau^2$$

in quanto è:

$$\sigma^2 = 3\tau^2$$

il semiasse di lunghezza  $\sigma_{adm}$ , cioè quello di lunghezza maggiore, giace sull'asse delle ascisse (asse delle  $\sigma$ ), mentre il semiasse di lunghezza  $\tau_{adm}$ , cioè quello di lunghezza minore, giace sull'asse delle ordinate (asse delle  $\tau$ ). Ne consegue che l'espressione:

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_{adm}^2} + \frac{\tau^2}{\tau_{adm}^2} \leq 1$$

rappresenta i punti interni (o, al limite, appartenenti al contorno) di un'ellisse con centro nell'origine degli assi  $\sigma$ - $\tau$  e avente per semiassi maggiore e minore rispettivamente  $\sigma_{adm}$  e  $\tau_{adm}$  (come appare nella Figura 1 già menzionata).

**B)** Oltre al già citato criterio di Hencky-Huber-Von Mises sono stati formulati altri criteri di resistenza per i materiali duttili. Tra questi, il **criterio di Beltrami-Huber-Haig** e quello di **Guest-Tresca**.

Secondo il **criterio di Beltrami-Huber-Haig** la verifica a resistenza può essere realizzata tramite l'espressione:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 2,5 \cdot \tau^2} \leq \sigma_{adm}$$

Di conseguenza, l'espressione:

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_{adm}^2} + \frac{\tau^2}{\tau_{adm}^2} \leq 1 \quad (2)$$

è calcolata ponendovi:

$$\tau_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{\sqrt{2,5}}$$

In base al **criterio di Guest-Tresca** si avrebbe invece:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq \sigma_{adm}$$

Conseguentemente, la (2) viene calcolata ponendovi:

$$\tau_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{\sqrt{4}} = \frac{\sigma_{adm}}{2}$$

Le considerazioni fatte per il criterio di Hencky-Huber-Von Mises valgono anche per i criteri di Beltrami-Huber-Haig e Guest-Tresca. Potremo quindi rappresentare su uno stesso piano  $\sigma/\tau$  le ellissi di equazione:

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_{adm}^2} + \frac{\tau^2}{\tau_{adm}^2} = 1$$

relative ai vari criteri di resistenza ora ricordati (Figura 1 già menzionata).