

1 Dinamica dei fluidi comprimibili

1.1 Generalità

Lo studio del comportamento di un fluido comprimibile in movimento è reso difficoltoso dalla necessità di conoscere un elevato numero di grandezze.

Infatti per un fluido comprimibile in moto occorre conoscere non solo la pressione, il volume e la temperatura, ma anche la velocità, la posizione e le eventuali trasformazioni di energia subite durante il moto.

Nello studio del moto degli aeriformi (gas o vapori) in una condotta occorre considerare la variazione del loro volume in funzione della pressione e della temperatura, per cui le leggi dell'idrodinamica sono ancora concettualmente valide, ma devono essere opportunamente adattate.

A causa della variabilità del volume dell'aeriforme, occorre perciò riferirsi non alla portata volumetrica Q_{vol} , misurata in $\frac{m^3}{s}$, ma a quella massica M , misurata in $\frac{kg}{s}$ ed espressa dalla relazione:

$$M = \rho \cdot Q_{vol} \left[\frac{kg}{s} \right] \quad (1)$$

dove:

ρ = massa volumica (o densità) dell'aeriforme $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$.

In base all'espressione:

$$Q_{vol} = A \cdot v \left[\frac{m^3}{s} \right]$$

in cui:

A = area della sezione della condotta in cui fluisce l'aeriforme $[m^2]$;

v = velocità del fluido $[m/s]$;

la (1) può scriversi:

$$M = \rho \cdot A \cdot v \quad (2)$$

Dal momento che il volume massico v_m è l'inverso della massa volumica ρ , ovvero è:

$$v_m = \frac{1}{\rho} \left[\frac{m^3}{kg} \right]$$

la (2) diviene:

$$M = \rho \cdot A \cdot v = \frac{A \cdot v}{v_m} \left[\frac{kg}{s} \right] \quad (3)$$

Come si ricorderà, il volume massico v_m dipende dalla pressione e dalla temperatura del fluido.

1.2 Equazione di continuità

Consideriamo una condotta percorsa da un fluido comprimibile in moto con regime permanente. Poiché in questo tipo di moto la velocità v , la pressione p e la massa volumica ρ sono costanti nel tempo in ogni sezione della condotta, sarà costante in ogni sezione anche la portata massica M di fluido.

Se ci riferiamo quindi alla portata massica M del fluido l'equazione di continuità risulta:

$$M_1 = M_2 \rightarrow \rho_1 \cdot A_1 \cdot v_1 = \rho_2 \cdot A_2 \cdot v_2$$

In base alla (3) l'equazione di continuità può essere scritta anche nella forma:

$$\frac{A_1 \cdot v_1}{v_{m1}} = \frac{A_2 \cdot v_2}{v_{m2}}$$

1.3 Teorema di Bernoulli per i fluidi comprimibili

Analogamente a quanto visto in idrodinamica, applichiamo il principio della conservazione dell'energia tra due sezioni di una condotta percorsa da un fluido comprimibile in moto permanente.

Supponiamo che il fluido riceva dall'esterno una quantità di calore Q_s . In tali condizioni il *teorema di Bernoulli*, riferito a una massa unitaria di fluido ($m = 1 \text{ kg}$), risulta:

$$g \cdot z_1 + p_1 \cdot v_{m1} + \frac{v_1^2}{2} + u_1 + Q_s - \sum y = g \cdot z_2 + p_2 \cdot v_{m2} + \frac{v_2^2}{2} + u_2 \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (4)$$

Nei due membri della relazione sono presenti le seguenti forme di energia:

- energia potenziale di posizione $g \cdot z$;
- energia potenziale di pressione $p \cdot v_m$;
- energia cinetica $\frac{v^2}{2}$;
- energia interna u .

Dalla relazione (4) risulta dunque che l'energia totale della massa unitaria di fluido nella sezione 2 è uguale a quella posseduta nella sezione 1, aumentata del lavoro ottenuto dalla conversione del calore Q_s ricevuto dall'esterno e diminuita delle eventuali resistenze passive $\sum y$.

Come è noto, nel Sistema Internazionale il joule è l'unità di misura sia del lavoro meccanico sia dell'energia termica. Se si trascurano il modesto lavoro compiuto dalle forze di gravità $g \cdot (z_1 - z_2)$ e le resistenze passive, il teorema di Bernoulli espresso dalla (4) assume la forma seguente:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = p_1 \cdot v_{m1} + u_1 - (p_2 \cdot v_{m2} + u_2) + Q_s \quad (5)$$

da cui, in base alla formula dell'entalpia:

$$h = u + p \cdot v$$

si ottiene:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = h_1 - h_2 + Q_s$$

Per una trasformazione adiabatica ($Q_s = 0$) vale la seguente relazione, utile nello studio delle turbine a vapore:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = h_1 - h_2 \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (6)$$

Da questa formula risulta che in una trasformazione adiabatica la variazione di energia cinetica subita da una massa unitaria di fluido (J/kg) è uguale alla variazione di entalpia avvenuta tra lo stato fisico iniziale e quello finale.

1.4 Velocità di efflusso di un aeriforme

La relazione (6):

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = h_1 - h_2 \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]$$

può essere utilizzata per calcolare la velocità di efflusso di un aeriforme attraverso un foro praticato nel recipiente in cui è racchiuso.

Il gas esce con moto permanente per effetto della differenza tra le pressioni p_1 all'interno del recipiente e p_2 dell'ambiente esterno, con:

$$p_1 > p_2$$

Supponiamo che all'uscita il gas si espanda in modo adiabatico ($Q_s = 0$) e trascuriamo la velocità v_1 nella sezione iniziale, perché posta lontano dal foro dove il fluido è in quiete.

Dalla relazione (6) possiamo allora calcolare la velocità teorica v_{2t} in corrispondenza della sezione di area minima della vena fluida, appena fuori dal recipiente: è la cosiddetta *sezione contratta*.

L'espressione (6) diviene:

$$\frac{v_2^2}{2} = h_1 - h_2$$

da cui:

$$v_{2t} = \sqrt{2 \cdot (h_1 - h_2)} \approx 1,4142 \cdot \sqrt{(h_1 - h_2)}$$

dove h_1 e h_2 indicano le entalpie dell'aeriforme rispettivamente all'interno e all'esterno del recipiente.

Se si tiene conto degli attriti incontrati dall'aeriforme, la velocità effettiva v_{2r} di efflusso sarà minore di quella teorica. Essa vale:

$$v_{2r} = \phi' \cdot 1,4142 \cdot \sqrt{(h_1 - h_2)}$$

in cui ϕ' è un coefficiente riduttivo < 1 . La *velocità teorica di efflusso* v_{2t} di un aeriforme in un'espansione adiabatica può essere calcolata anche con la *formula di Saint-Venant*:

$$v_{2t} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \cdot p_1 \cdot v_{m1} \cdot \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (7)$$

in cui:

$k = \text{costante di Poisson}$, è il rapporto tra la capacità termica massica a pressione costante c_p e la capacità termica massica a volume costante c_v . In formula:

$$k = \frac{c_p}{c_v}$$

I restanti simboli si riferiscono a grandezze già note.

Se moltiplichiamo per un coefficiente riduttivo $\phi < 1$ la v_{2t} ricavata dalla (7), otteniamo la *velocità effettiva di efflusso*.