

Dimostrazione dell'espressione:

$$Q = K \cdot A \cdot (t_1 - t_2) \cdot \tau$$

dove:

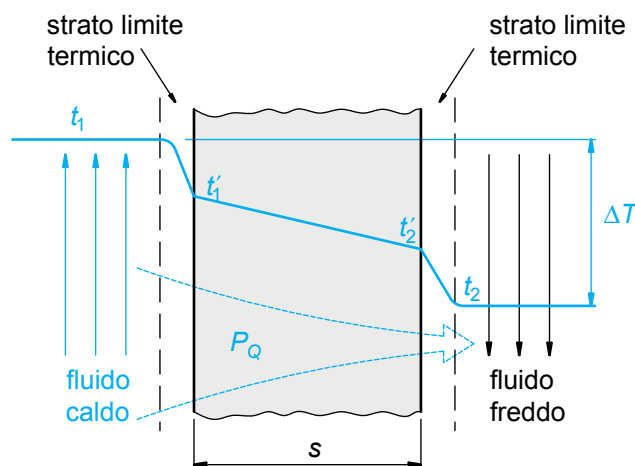
$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

Prendiamo in esame la trasmissione di calore tra il fluido 1 (caldo) che lambisce a sinistra la parete divisoria (Figura 1) e il fluido 2 (freddo) che la lambisce a destra.

Figura 1

Trasmissione di calore attraverso una parete:

$$P_Q = \frac{Q}{\tau}$$



Indichiamo con:

- t_1 e t_2 le temperature rispettivamente del fluido 1 e del fluido 2, entrambe misurate a una conveniente distanza dalla parete divisoria. Sono cioè le temperature dei due fluidi al di fuori dello strato limite termico;
- t'_1 e t'_2 le temperature misurate direttamente sulle facce rispettivamente di sinistra e di destra della parete, cioè a diretto contatto con le superfici.

La parete considerata ha le facce piane e parallele.

Nello schema di Figura 1 la temperatura t_1 , che mantiene lo stesso valore in tutta la massa fluida a sinistra della parete, si abbassa rapidamente fino a raggiungere il valore t'_1 in corrispondenza dello strato limite termico. Continua poi a diminuire lungo la parete di spessore s fino a raggiungere il valore t'_2 sulla faccia di destra della parete stessa. Subisce una nuova, rapida diminuzione nell'attraversare lo strato limite termico adiacente alla faccia di destra della parete fino ad assumere il valore t_2 , valore che si mantiene costante in tutta la massa di fluido a destra della parete.

Risulta perciò:

$$t_1 > t'_1 > t'_2 > t_2$$

Per la dimostrazione della formula citata all'inizio, utilizzeremo due procedimenti: il primo è basato sulle usuali formule della trasmissione del calore per conduzione e per convezione; il secondo fa riferimento alle resistenze termiche per conduzione e per convezione e irraggiamento.

Procedimento 1

Il fluido caldo 1 trasmette alla parete, nel tempo τ , la quantità di calore:

$$Q = \alpha_1 \cdot A \cdot (t_1 - t'_1) \cdot \tau \quad [\text{J}] \quad (1)$$

dove:

α_1 = coefficiente di adduzione, cioè di convezione con il fluido caldo 1 e di irraggiamento con i corpi posti a sinistra della parete $\left(\text{in } \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right)$;
 A = area della superficie di scambio termico (in m^2);
 τ = durata dello scambio termico (in s).

La stessa quantità di calore Q attraversa per conduzione la parete di separazione; è quindi esprimibile con la formula:

$$Q = \frac{\lambda \cdot A \cdot (t'_1 - t'_2) \cdot \tau}{s} \quad [\text{J}] \quad (2)$$

dove:

λ = coefficiente di conduttività termica della parete $\left(\text{in } \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right)$.

Infine la parete trasmette la stessa quantità di calore Q al fluido freddo 2 per convezione; applicheremo quindi la formula:

$$Q = \alpha_2 \cdot A \cdot (t'_2 - t_2) \cdot \tau \quad [\text{J}] \quad (3)$$

dove:

α_2 = coefficiente di adduzione, cioè di convezione con il fluido freddo 2 e di irraggiamento con i corpi posti a destra della parete $\left(\text{in } \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right)$.

Se la trasmissione di calore avviene in regime permanente, cioè con le varie temperature costanti nel tempo, dalle espressioni (1), (2) e (3) possiamo ricavare i salti di temperatura:

$$(t_1 - t'_1) = \frac{Q}{\alpha_1 \cdot A \cdot \tau} \quad (1')$$

$$(t'_1 - t'_2) = \frac{Q \cdot s}{\lambda \cdot A \cdot \tau} \quad (2')$$

$$(t'_2 - t_2) = \frac{Q}{\alpha_2 \cdot A \cdot \tau} \quad (3')$$

Se sommiamo membro a membro le relazioni (1'), (2') e (3') otteniamo:

$$(t_1 - t_2) = \frac{Q}{A \cdot \tau \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right)}$$

Se poniamo:

$$\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = \frac{1}{K}$$

risulta:

$$(t_1 - t_2) = \frac{Q}{A \cdot \tau} \cdot \frac{1}{K}$$

da cui:

$$Q = K \cdot A \cdot (t_1 - t_2) \cdot \tau \quad [\text{J}] \quad (4)$$

La (4) esprime la quantità di calore Q trasmessa nel tempo dal fluido 1 al fluido 2 attraverso la parete di separazione.

Procedimento 2

Nel nostro caso abbiamo:

$$R_Q = R_{1Q} + R_{2Q} + R_{3Q}$$

perché si tratta di tre resistenze termiche in serie (**Figura 2**).

Figura 2

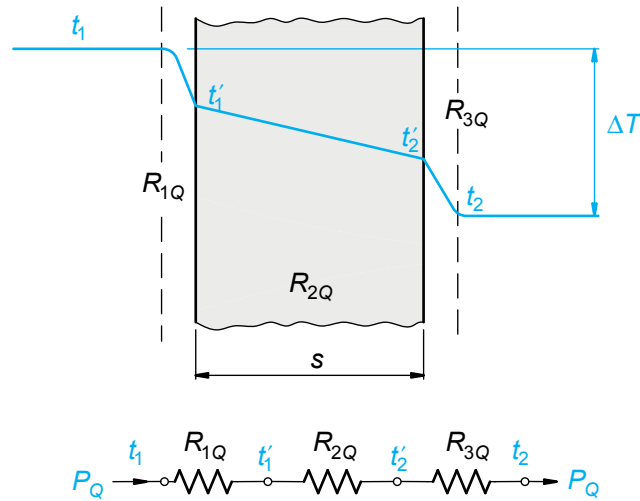
Trasmissione del calore attraverso una parete, schematizzato con le resistenze termiche. Con:
 $R_Q = R_{1Q} + R_{2Q} + R_{3Q}$ e

$$P_Q = \frac{Q}{\tau}$$

essendo:

$$R_{1Q} = \frac{1}{\alpha_1 \cdot A}; \quad R_{2Q} = \frac{s}{\lambda \cdot A};$$

$$R_{3Q} = \frac{1}{\alpha_2 \cdot A}$$



Dal momento che è:

$$R_{1Q} = \frac{1}{\alpha_1 \cdot A}; \quad R_{2Q} = \frac{s}{\lambda \cdot A}; \quad R_{3Q} = \frac{1}{\alpha_2 \cdot A}$$

risulta:

$$R_Q = R_{1Q} + R_{2Q} + R_{3Q} = \frac{1}{\alpha_1 \cdot A} + \frac{s}{\lambda \cdot A} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot A} = \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right)$$

Se poniamo:

$$\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = \frac{1}{K}$$

si ottiene:

$$R_Q = \frac{1}{K \cdot A}$$

da cui:

$$P_Q = \frac{\Delta T}{R_Q} = K \cdot A \cdot \Delta T$$

Dato che è:

$$P_Q = \frac{Q}{\tau}$$

si ricava:

$$P_Q = \frac{Q}{\tau} = K \cdot A \cdot \Delta T$$

e infine:

$$Q = K \cdot A \cdot \Delta T \cdot \tau \quad [\text{J}] \quad (4)$$

La (4) esprime la quantità di calore Q trasmessa nel tempo τ dal fluido 1 al fluido 2 attraverso la parete di separazione.