

Determinazione delle espressioni del taglio e del momento flettente delle travi semplicemente appoggiate, soggette a carichi distribuiti con legge lineare

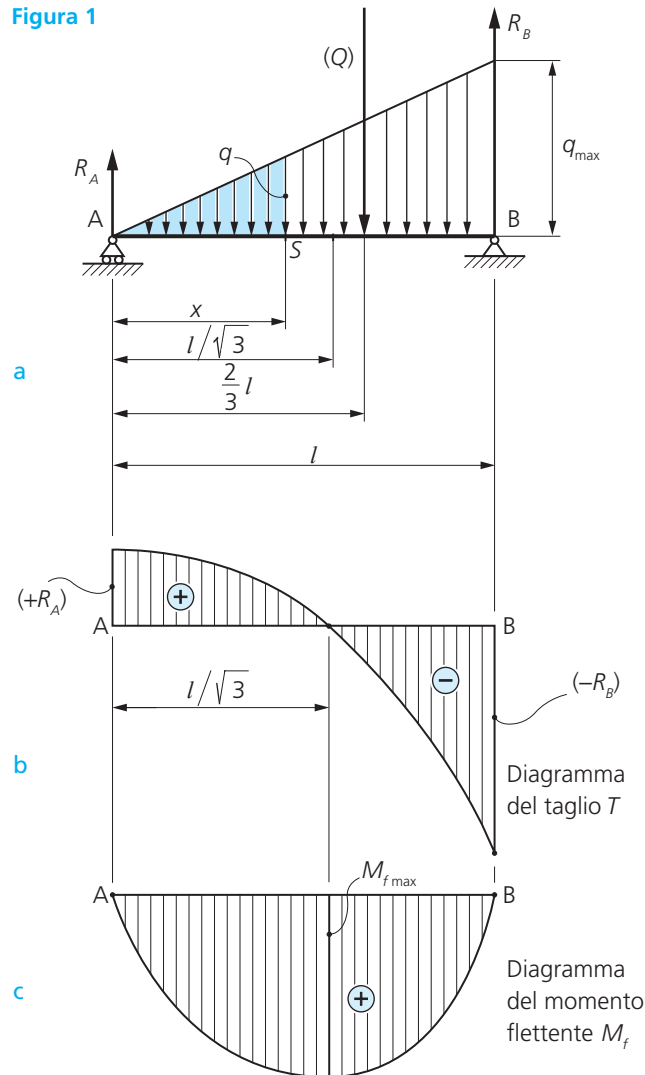
Diagramma del taglio nelle travi appoggiate soggette a carichi distribuiti con legge lineare (Figura 1)

I carichi esterni presi in esame non sono più distribuiti uniformemente ma linearmente: il diagramma della loro distribuzione è cioè triangolare. È la distribuzione tipica della spinta idrostatica dei liquidi sulle pareti del recipiente che li contiene o delle forze centrifughe agenti sul fusto delle bielle nei meccanismi biella-manovella.

Il carico per unità di lunghezza q agente su una generica sezione S posta a distanza x da A vale, per la similitudine fra il triangolo rettangolo di base AB e quello di base AS (quest'ultimo evidenziato con il colore in **Figura 1a**):

$$q = q_{\max} \cdot \frac{x}{l} \quad (1)$$

Figura 1



Risolvendo la trave, si ottiene:

$$R_A = \frac{1}{3} \cdot Q = \frac{1}{3} \cdot \frac{q_{\max} \cdot l}{2} = \frac{q_{\max} \cdot l}{6} \quad (2)$$

$$R_B = \frac{2}{3} \cdot Q = \frac{2}{3} \cdot \frac{q_{\max} \cdot l}{2} = \frac{q_{\max} \cdot l}{3} \quad (3)$$

dove:

$$Q = \frac{q_{\max} \cdot l}{2}$$

è il carico complessivo agente sulla trave, pari all'area della distribuzione triangolare totale.

Il taglio agente sulla sezione S , calcolato con le forze a sinistra di tale sezione, vale:

$$T_S = +R_A - \frac{q \cdot x}{2} \quad (4)$$

essendo: $\frac{q \cdot x}{2}$ la risultante delle forze distribuite sulla trave a sinistra di S , pari all'area della distribuzione triangolare parziale evidenziata con il colore in Figura 1a. Sostituendo a q e R_A le relative espressioni (1) e (2) si ottiene:

$$T_S = +\frac{q_{\max} \cdot l}{6} - \frac{\left(q_{\max} \cdot \frac{x}{l}\right) \cdot x}{2} = +\frac{q_{\max} \cdot l}{6} - \frac{q_{\max}}{2 \cdot l} \cdot x^2 \quad (5)$$

L'espressione (5) rappresenta, sul piano $T-x$, una parabola del 2° ordine. Dunque, il diagramma del taglio è un arco di parabola (Figura 1b).

Il taglio è nullo per $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$. Infatti, posto: $T_S = 0$, ovvero:

$$\frac{q_{\max} \cdot l}{6} - \frac{q_{\max}}{2 \cdot l} \cdot x^2 = 0$$

si ottiene:

$$\frac{q_{\max} \cdot l}{6} = \frac{q_{\max}}{2 \cdot l} \cdot x^2$$

e quindi:

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot l}{q_{\max}} \cdot \frac{q_{\max} \cdot l}{6}} = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

Per $x = 0^+$ dalla (5) si ricava:

$$T_{(x=0^+)} = +\frac{q_{\max} \cdot l}{6} = +R_A$$

Per $x = l^-$ si ha:

$$T_{(x=l^-)} = +\frac{q_{\max} \cdot l}{6} - \frac{q_{\max}}{2 \cdot l} \cdot l^2 = \frac{q_{\max} \cdot l^2 - 3 \cdot q_{\max} \cdot l^2}{6 \cdot l} = -\frac{2 \cdot q_{\max} \cdot l^2}{6 \cdot l}$$

ovvero:

$$T_{(x=l^-)} = -\frac{q_{\max} \cdot l}{3} = -R_B$$

Diagramma del momento flettente nelle travi appoggiate soggette a carichi distribuiti con legge lineare (Figura 1)

Il diagramma del momento flettente, in questo caso, è una parabola del 3° ordine. Risulta infatti, per una sezione generica S posta a distanza x da A :

$$M_S = +R_A \cdot x - \frac{q \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3} \quad (6)$$

essendo:

$\frac{q \cdot x}{2}$ la risultante delle forze distribuite sulla trave a sinistra di S ;

$\frac{x}{3}$ la distanza di tale risultante dalla sezione S .

Ricordiamo che la risultante della distribuzione del carico passa per il baricentro della distribuzione stessa; cioè, in questo caso, per il baricentro del triangolo evidenziato con il colore in Figura 1a.

Sostituendo a q e R_A rispettivamente le relazioni (1) e (2), la (6) diviene:

$$M_S = +\frac{q_{\max} \cdot l}{6} \cdot x - \frac{\left(q_{\max} \cdot \frac{x}{l}\right) \cdot x^2}{6} = +\frac{q_{\max} \cdot l}{6} \cdot x - \frac{q_{\max}}{6 \cdot l} \cdot x^3 \quad (7)$$

La (7) è l'equazione di una parabola cubica, come s'era anticipato poc'anzi. Il valore del momento flettente massimo $M_{f \max}$ si ottiene ponendo nella (7) il valore di x per cui il taglio si annulla, ovvero:

$$x = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

Si ricava:

$$M_{f \max \left(x = \frac{l}{\sqrt{3}} \right)} = +\frac{q_{\max} \cdot l}{6} \cdot \frac{l}{\sqrt{3}} - \frac{q_{\max}}{6 \cdot l} \cdot \left(\frac{l}{\sqrt{3}} \right)^3 = +\frac{q_{\max} \cdot l^2}{6 \cdot \sqrt{3}} - \frac{q_{\max} \cdot l^2}{6 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{q_{\max} \cdot l^2}{6 \cdot \sqrt{3}}$$

cioè:

$$M_{f \max} = +\frac{q_{\max} \cdot l^2}{9 \cdot \sqrt{3}} \quad (8)$$

o anche:

$$M_{f \max} \simeq 0,064 \cdot q_{\max} \cdot l^2 \quad (9)$$

Il momento flettente, espresso dalla relazione (7):

$$M_S = +\frac{q_{\max} \cdot l}{6} \cdot x - \frac{q_{\max}}{6 \cdot l} \cdot x^3$$

si annulla, come è facile verificare, per $x = 0$ e per $x = l$.

Il diagramma del momento flettente è rappresentato in **Figura 1c**.

Nota bene

Dato che:

$$Q = \frac{q_{\max} \cdot l}{2}$$

e quindi:

$$q_{\max} \cdot l = 2 \cdot Q$$

l'espressione (8) può anche essere scritta:

$$M_{f\max} = + \frac{2 \cdot Q \cdot l}{9 \cdot \sqrt{3}} \quad (10)$$

e di conseguenza la (9) diviene:

$$M_{f\max} \approx 0,128 \cdot Q \cdot l$$