



PROBLEMI SVOLTI: RAPPRESENTAZIONE DI POLIEDRI

Problema 1

Determinare le immagini di una piramide retta avente base esagonale sollevata rispetto a π_1 di h_1 , asse $\perp \pi_1$ e uno spigolo di base $\angle 45^\circ$ a π_2 . Sono assegnati: il lato di base l e l'altezza del poliedro h .

■ In questo esercizio la base del solido non giace su π_1 ma è sollevata e posta a quota h_1 ; tale condizione comporta che, su π_1 , non siano rappresentabili i vertici reali della base esagonale della piramide ma esclusivamente le loro immagini prime (► Fig. 1).

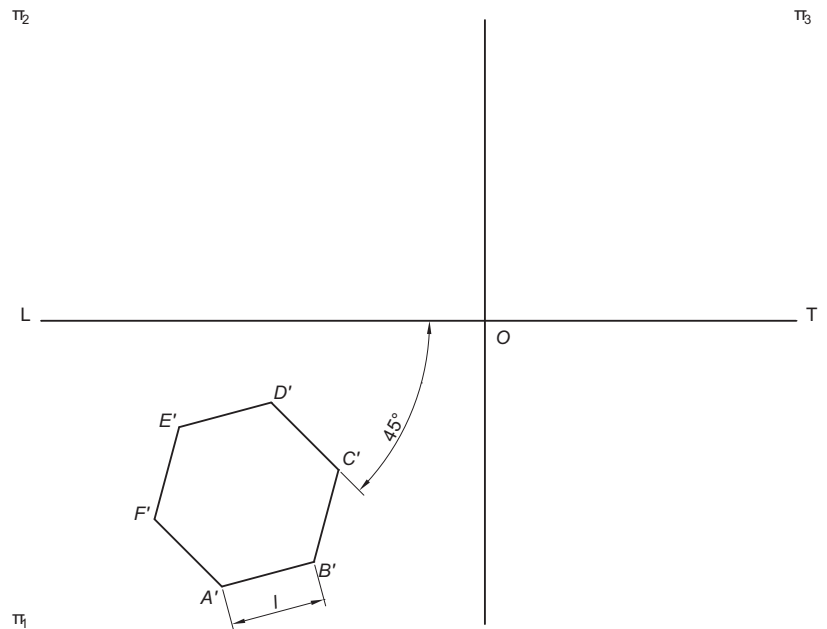
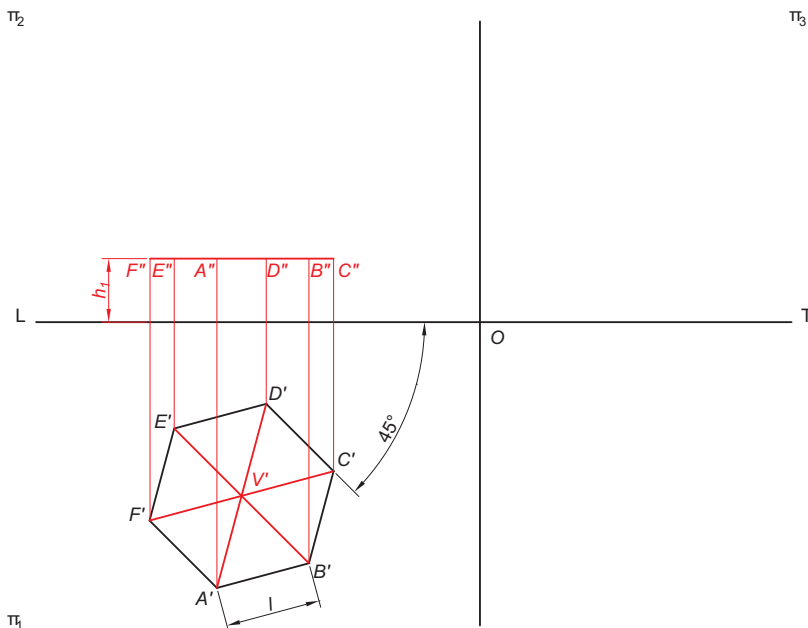


Fig. 1



■ Determinata l'immagine della base su π_1 , si esegue la proiezione su π_2 posizionando l'immagine seconda della base alla quota specificata h_1 . Su π_1 si tracciano gli spigoli delle facce laterali che concorrono nell'immagine prima del vertice della piramide V' (► Fig. 2).

Fig. 2

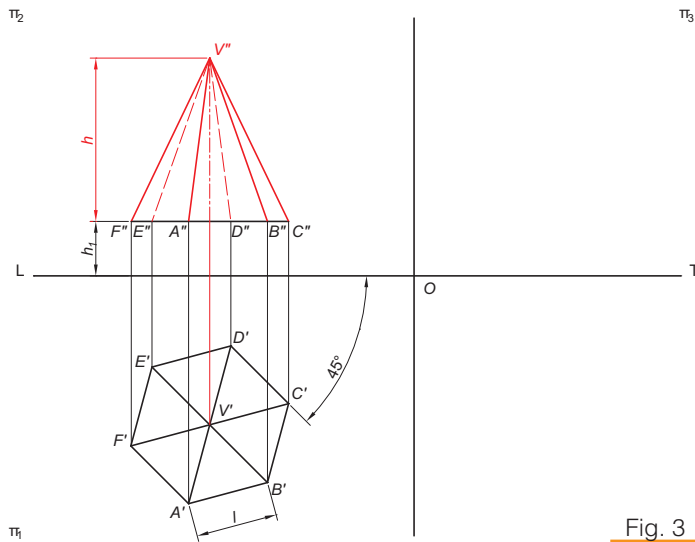


Fig. 3

- Si proietta il vertice su π_2 e lo si fissa in V'' alla quota h (altezza della piramide) dalla base. Si tracciano le immagini seconde degli spigoli laterali congiungendo i vertici di base con V'' . Gli spigoli EV e DV vengono rappresentati dalle immagini con segno 02.1 poiché, rispetto alla posizione della vista frontale, sono coperti dal solido stesso e perciò risultano nascosti (► Fig. 3).

- Completata la seconda immagine della piramide, ribaltando e proiettando da π_1 e proiettando da π_2 , si determina, su π_3 , la terza immagine del solido. In quest'ultima proiezione gli spigoli CV e BV vengono rappresentati dalle loro immagini mediante segno 02.1; infatti, rispetto alla posizione della vista da sinistra, sono coperti dal solido stesso e perciò risultano nascosti (► Fig. 4).

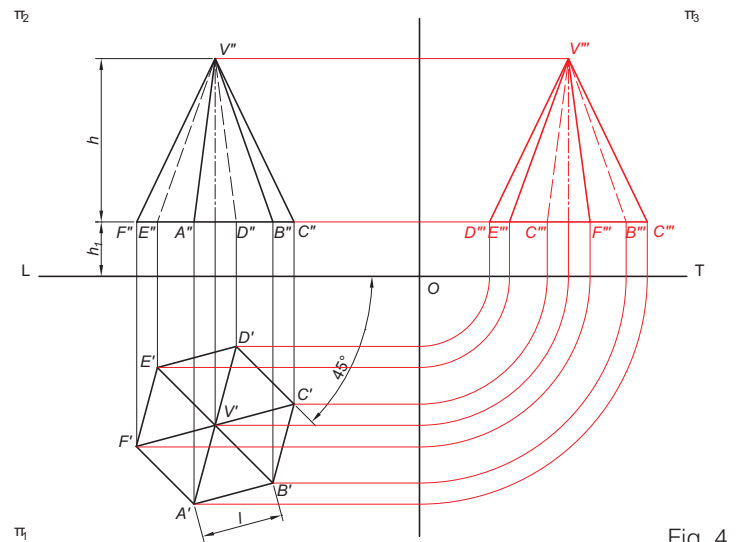


Fig. 4

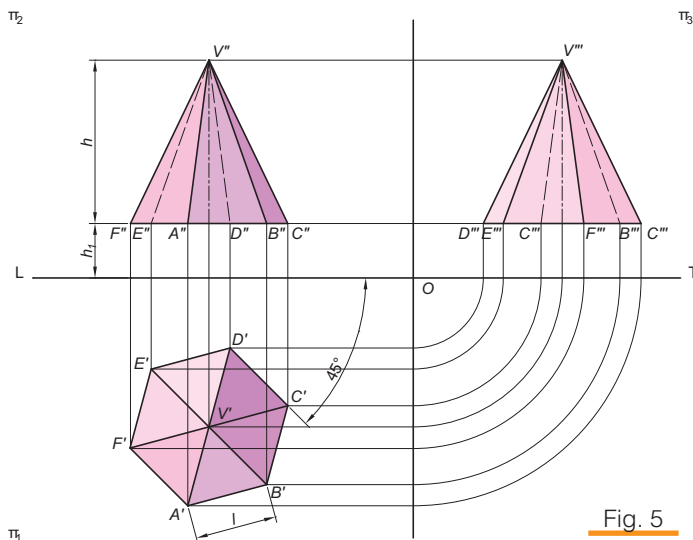


Fig. 5

- Nella rappresentazione descrittiva del solido l'utilizzo, per le facce in vista, di una campitura solida – in tonalità dello stesso colore – ne rende più agevole la lettura restituendo anche un buon effetto di tridimensionalità al disegno (► Fig. 5).

Problema 2

Determinare le immagini di un parallelepipedo avente base quadrata aggettata da π_2 di a , asse $\perp \pi_2$ e uno spigolo di base $\angle 30^\circ$ a π_1 . Sono assegnati: il lato di base l e l'altezza del solido h .

- Si rileva che la base del solido non giace su π_2 ma è staccata con aggetto a ; tale condizione comporta che, su π_2 , non siano rappresentabili i vertici reali della base quadrata del solido ma solamente le loro immagini seconde (► Fig. 6).

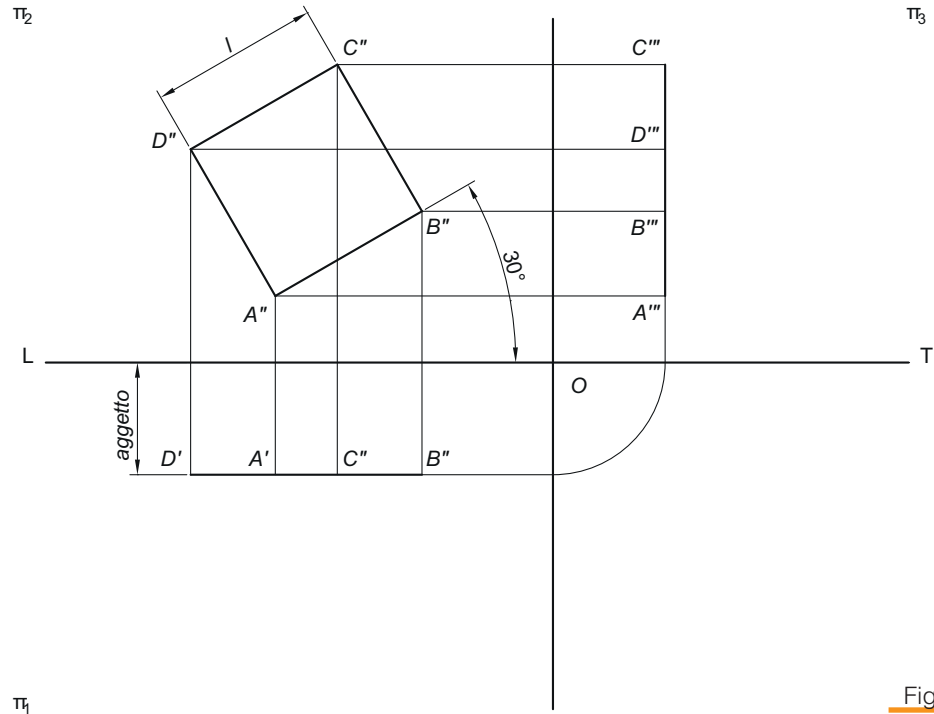


Fig. 6

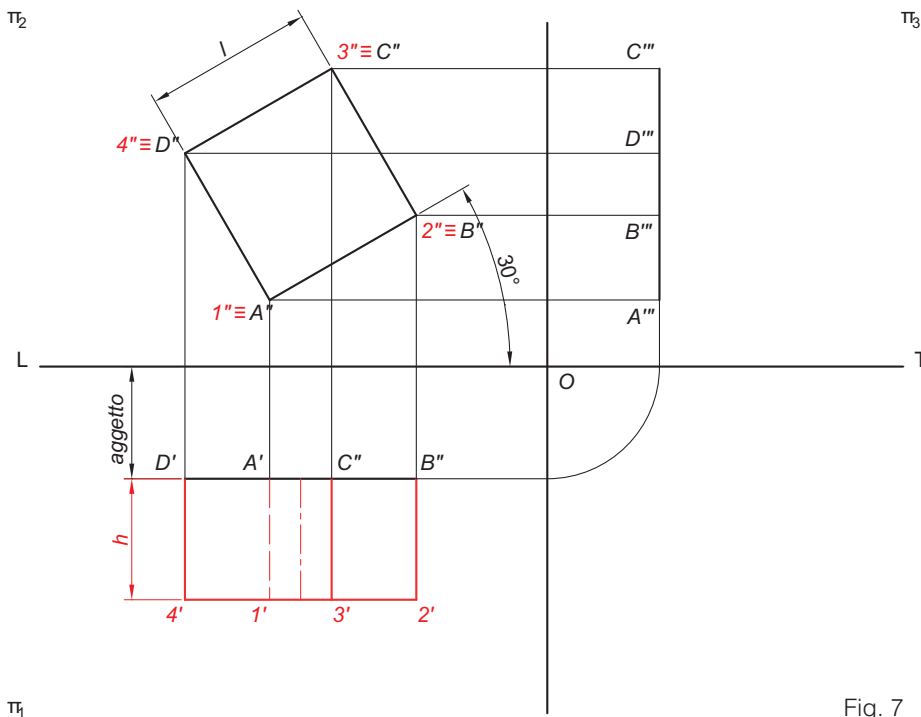


Fig. 7

- Su π_1 si traccia, dalla base, il riferimento dell'altezza h del solido, che consente di determinare sia gli spigoli delle facce laterali del parallelepipedo sia la posizione dell'altra base del solido con i suoi vertici. Lo spigolo $1A$ viene rappresentato su π_1 con segno 02.1 poiché, rispetto alla posizione della vista dall'alto, è coperto dal solido stesso e perciò risulta nascosto (► Fig. 7).

■ Proiettando e ribaltando le immagini prime e seconde del parallelepipedo si determina su π_3 l'immagine terza del solido. Rispetto alla posizione della vista da sinistra, tutti gli spigoli laterali sono visibili a eccezione dello spigolo $2B$ che risulta coperto dal solido stesso e perciò è nascosto: viene, di conseguenza, rappresentato con segno 02.1 (► Fig. 8).

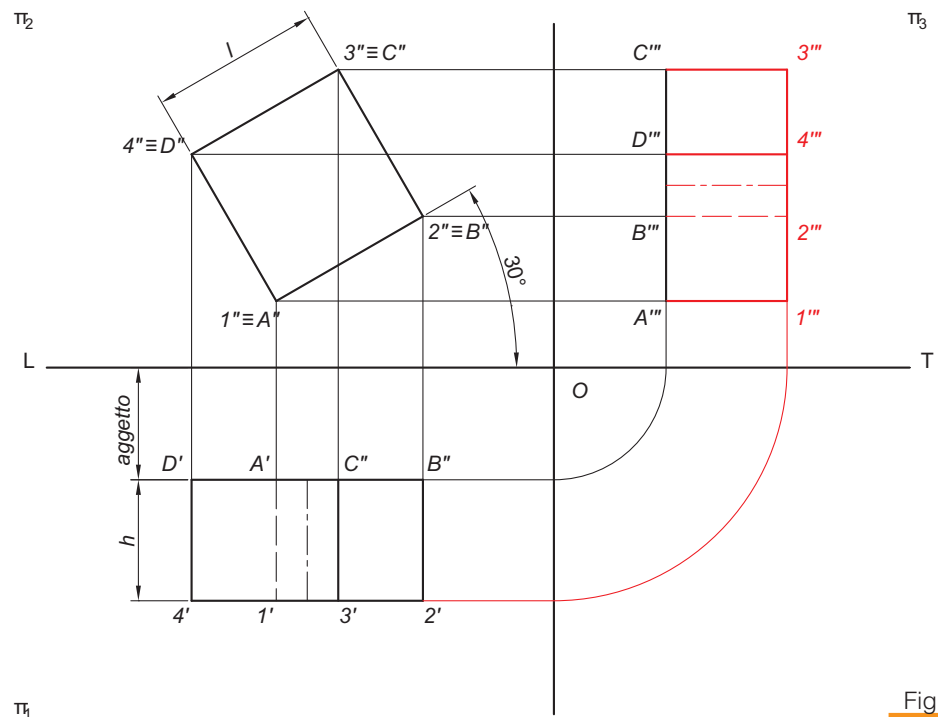


Fig. 8

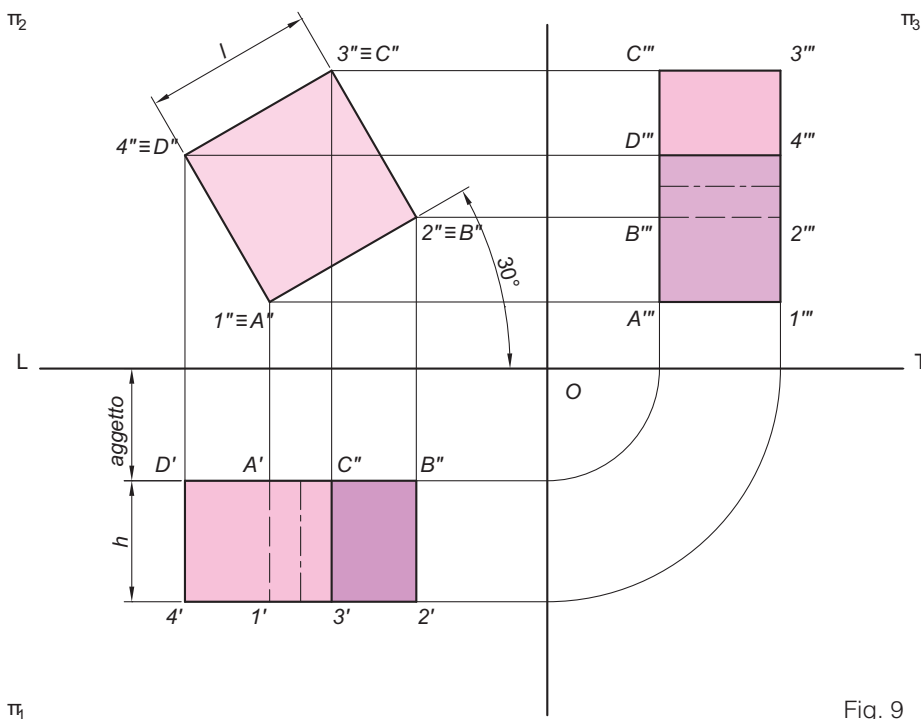


Fig. 9

■ Nella rappresentazione descrittiva del solido l'utilizzo, per le facce in vista, di una campitura solida – in tonalità dello stesso colore – ne rende più agevole la lettura restituendo anche un buon effetto di tridimensionalità al disegno (► Fig. 9).

Problema 3

Determinare le immagini di un prisma retto con base ettagonale giacente su π_3 , assegnati il R_{cc} alla base e l'altezza h del solido.

La rappresentazione obiettiva è la seguente (► Fig. 10).

Per eseguire la rappresentazione descrittiva operiamo per passi successivi.

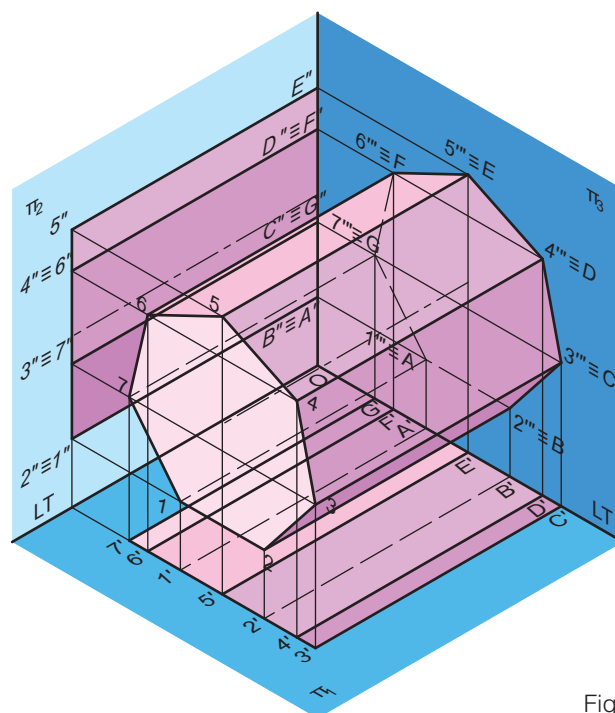


Fig. 10

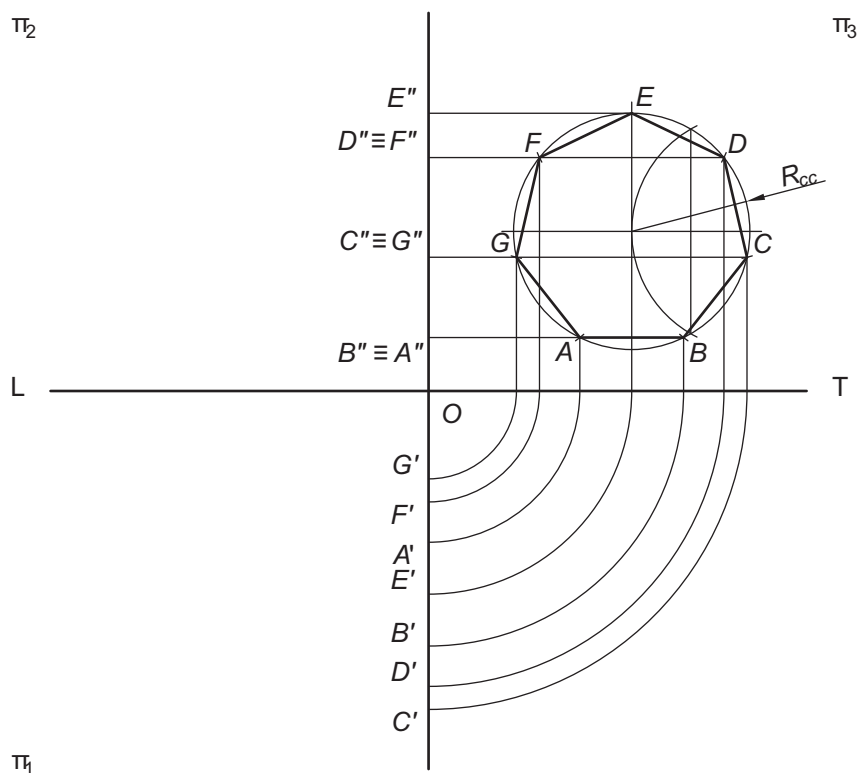


Fig. 11

- Si inizia disegnando il poligono di base (ettagono) giacente su π_3 e le sue immagini sugli altri quadri. Nella rappresentazione si indicano, su π_3 , solo i vertici reali della base senza riportare la coincidenza degli stessi con le loro immagini terze (► Fig. 11).

- Determinate le immagini della base giacente su π_3 , è possibile rappresentare la direzione degli spigoli delle facce laterali del prisma che sono ortogonali alle basi e di conseguenza ortogonali anche a π_3 , essendo il prisma retto. Così, dai vertici di base su π_1 e su π_2 , si tracciano i riferimenti degli spigoli (► Fig. 12).

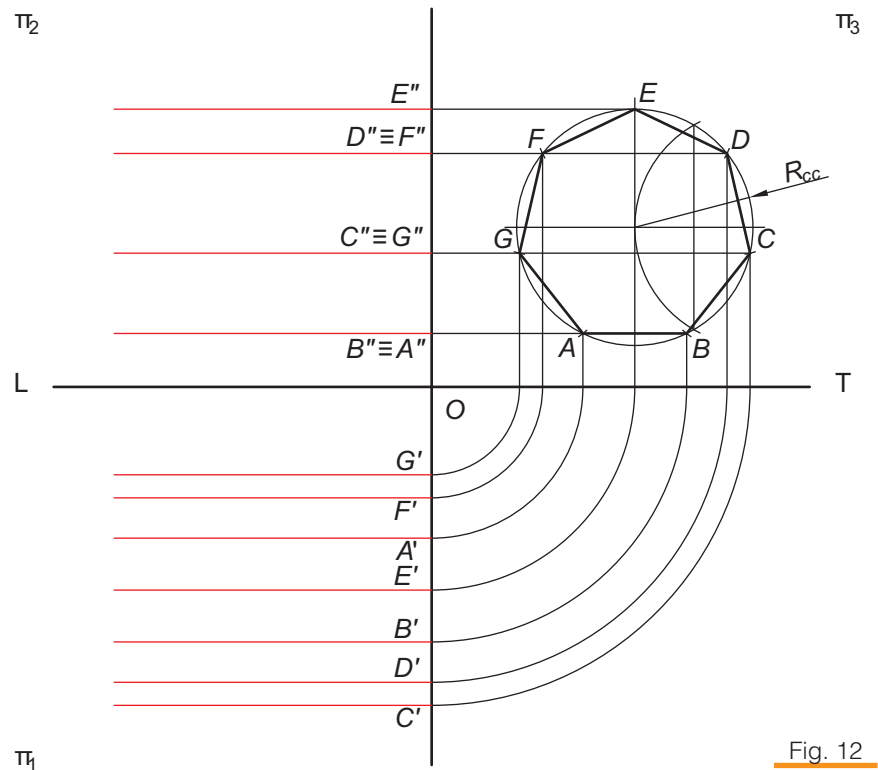


Fig. 12

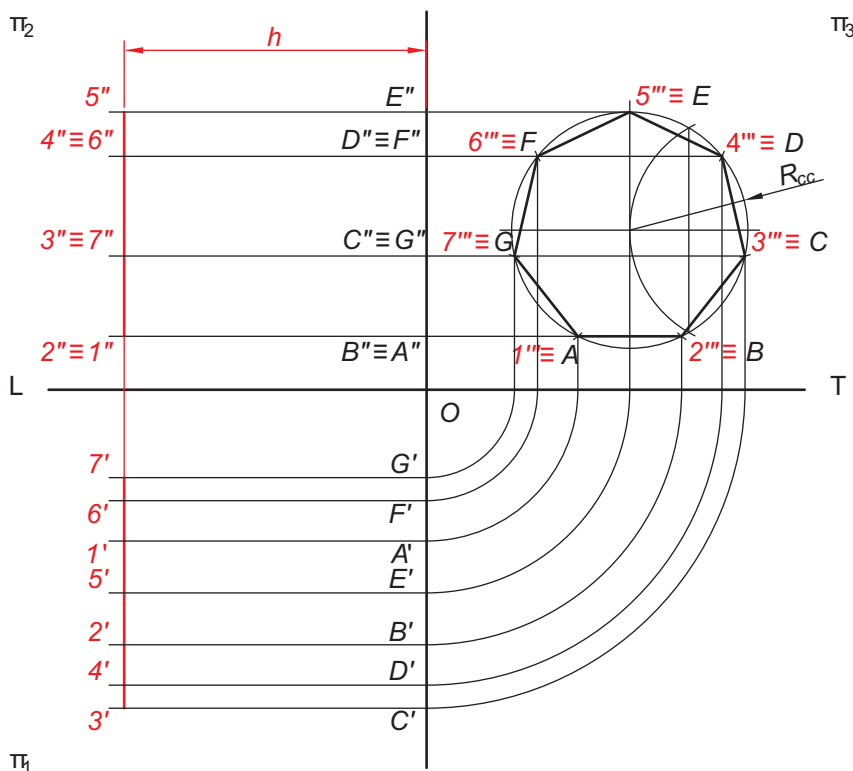


Fig. 13

- Individuati i riferimenti degli spigoli delle facce laterali si riporta l'altezza h del solido, che permette di determinare la posizione della base superiore del prisma e i suoi vertici. Su π_3 la perpendicolarità degli spigoli determina la coincidenza delle immagini dei vertici della base superiore con quelli della base giacente su π_3 . Le indicazioni dei vertici seguono la convenzione: ad A corrisponde 1, a B corrisponde 2 e così via (► Fig. 13).

■ Ora bisogna individuare gli spigoli in vista e quelli nascosti. L'adozione del metodo europeo determina che su π_2 (vista frontale) tutti gli spigoli in vista si sovrappongano a quelli nascosti; su π_1 (vista dall'alto) gli spigoli 1A e 2B risultano nascosti dal corpo del solido, vengono perciò rappresentati con segno 02.1; tutti gli altri spigoli sono in vista (► Fig. 14).

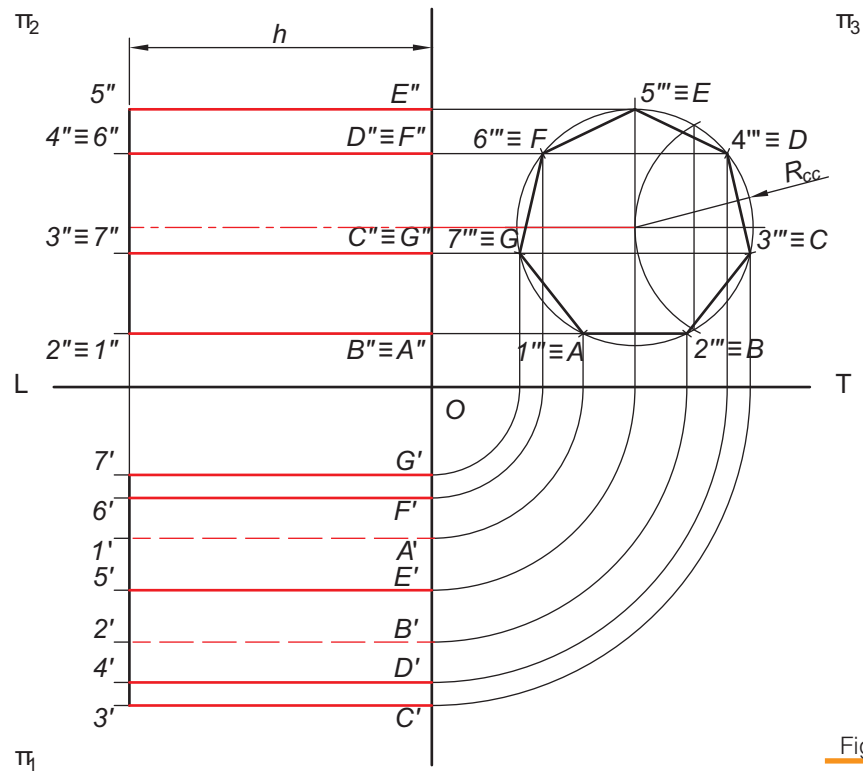
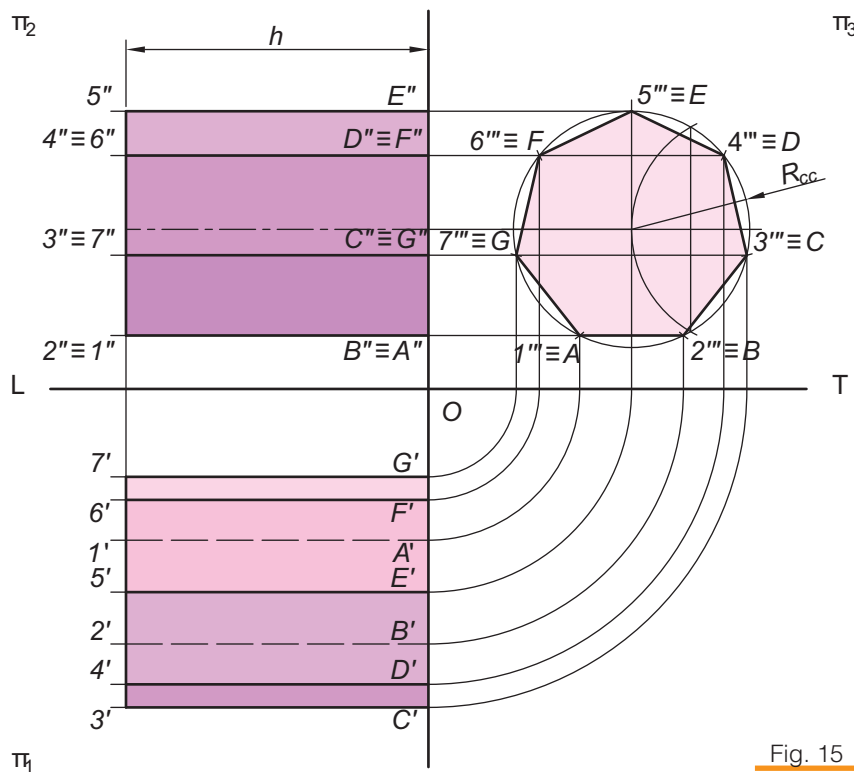


Fig. 14



■ Nella rappresentazione descrittiva del prisma l'utilizzo, per le facce e la base in vista, della campitura solida – in tonalità dello stesso colore – ne rende più agevole la lettura restituendo anche un buon effetto di tridimensionalità al disegno (► Fig. 15).

Fig. 15

Problema 4

Determinare le immagini di una piramide retta avente per base un triangolo equilatero, il vertice V giacente su π_3 , asse $\perp \pi_3$ e uno spigolo di base $\angle 45^\circ$ a π_1 . Sono assegnati: il lato di base l e l'altezza del solido h .

- In questo caso, non è la base della piramide a giacere sul quadro ma il suo vertice: tale condizione comporta che, su π_3 , venga rappresentato il vertice reale della piramide, mentre i vertici di base siano indicati esclusivamente con le loro immagini terze (► Fig. 16).

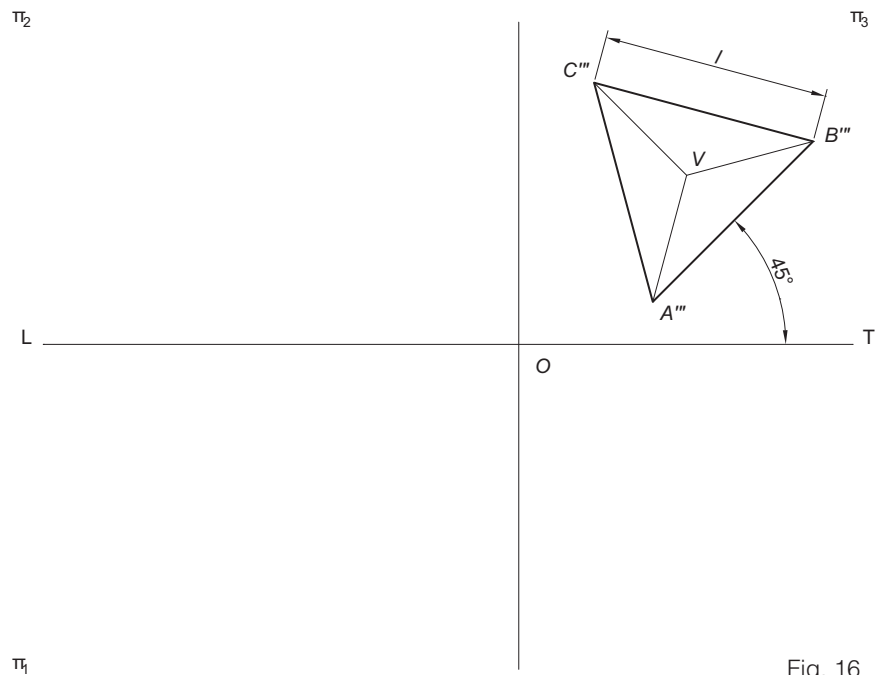


Fig. 16

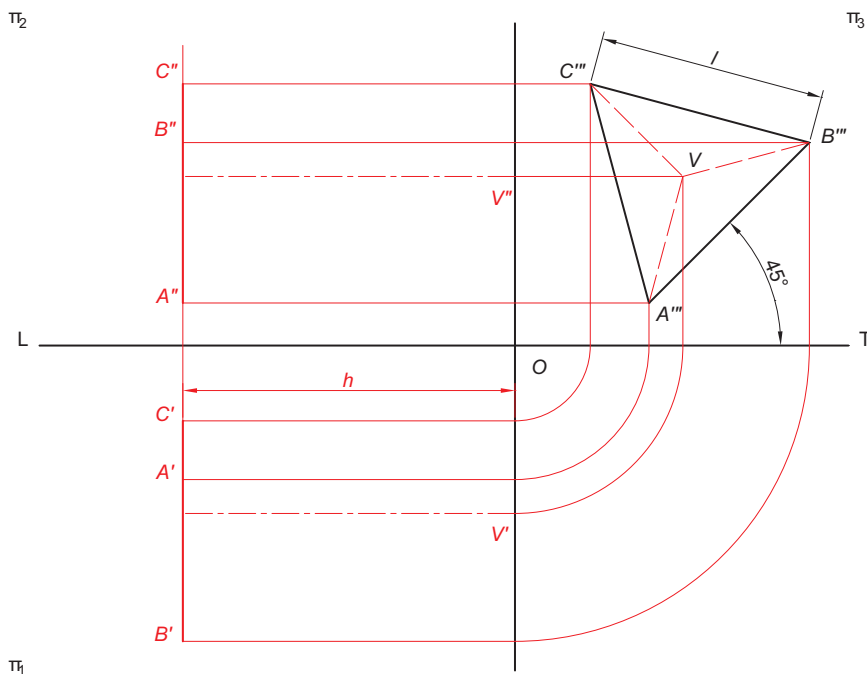


Fig. 17

- Determinata, su π_3 , l'immagine della base e la posizione del vertice V (nel baricentro del triangolo), si proietta il vertice su π_1 e si fissa V' . Si individua il riferimento della base distante h (altezza della piramide) da V' , ovvero da π_3 , sul quale vengono proiettati i vertici della base stessa. Allo stesso modo si procede su π_2 . Su π_3 si tracciano gli spigoli delle facce laterali che dai vertici di base concorrono in V ; questi spigoli risultano, nella vista da sinistra, coperti dal solido quindi non visibili e perciò vengono rappresentati con segno 02.1 (► Fig. 17).

■ Congiungendo, su π_1 , le immagini prime dei vertici di base con V' si ottiene l'immagine prima della piramide. La vista dall'alto determina che solo lo spigolo AV sia nascosto e quindi rappresentato con segno 02.1. Su π_2 , congiungendo le immagini seconde dei vertici di base con V'' , si ottiene l'immagine seconda della piramide. La vista frontale determina che nessuno spigolo sia nascosto (► Fig. 18).

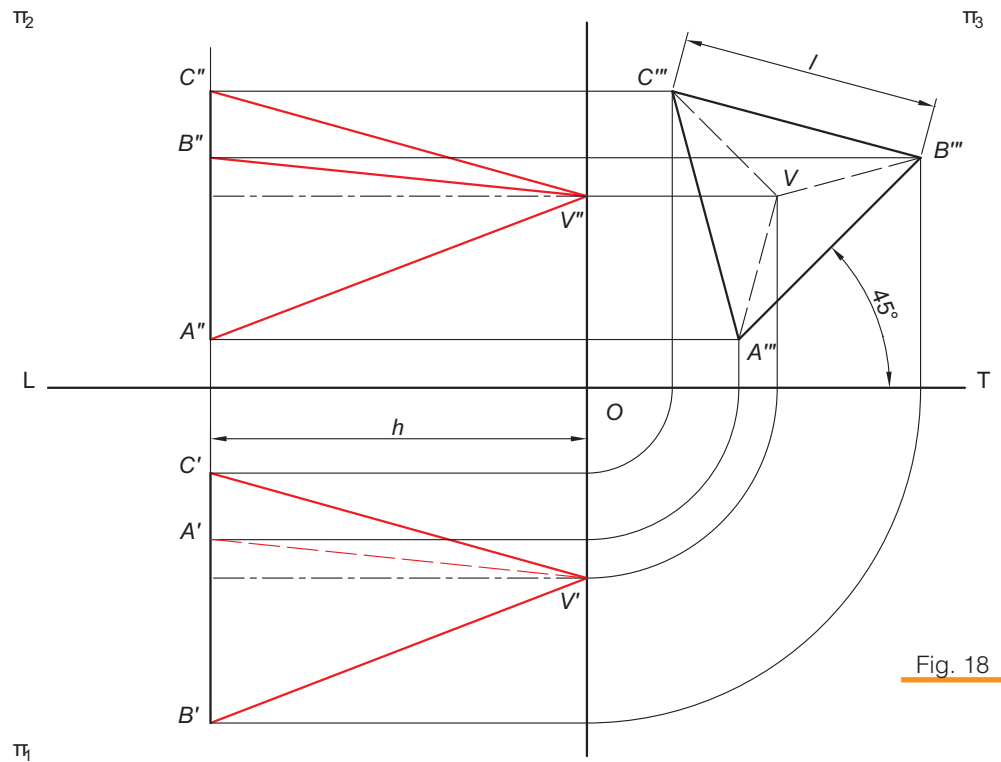
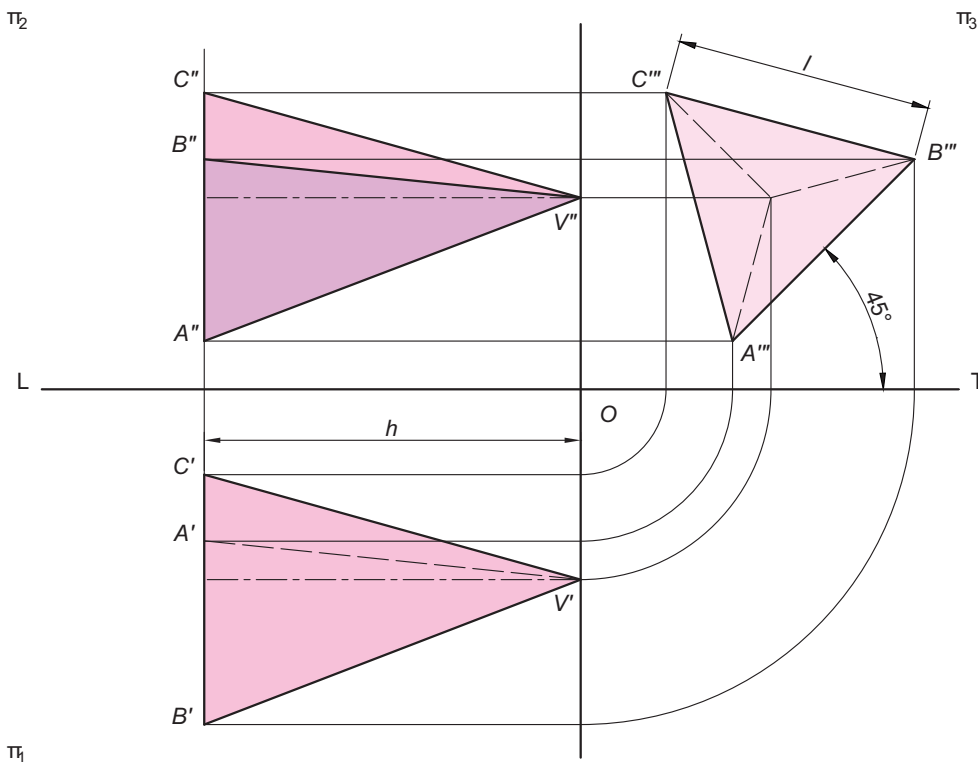


Fig. 18



■ Nella rappresentazione descrittiva del solido l'utilizzo, per le facce in vista, di una campitura solida – in tonalità dello stesso colore – ne rende più agevole la lettura restituendo anche un buon effetto di tridimensionalità al disegno (► Fig. 19).

Fig. 19

Problema 5

Determinare, nelle doppie proiezioni ortogonali, le immagini di un ottaedro di spigolo s , appoggiato con un vertice su π_1 , avente asse perpendicolare a π_1 e uno spigolo $\angle 30^\circ$ a π_2 .

- Richiamando le caratteristiche geometriche del solido (che risulta costituito da due piramidi a base quadrata aventi le basi in comune), la rappresentazione su π_1 non appare particolarmente impegnativa (► Fig. 20).

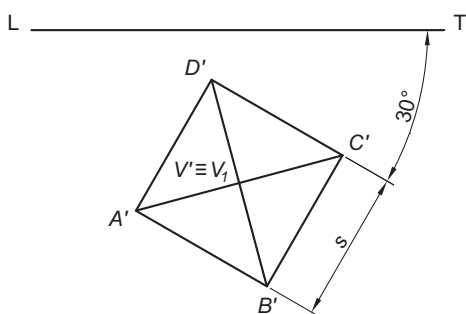
 π_2


Fig. 20

 π_1

- L'ottaedro, come noto, è inscritto in una sfera il cui raggio è uguale alla metà della diagonale del quadrato di base delle due piramidi; perciò, centrando in V' con apertura $V'A'$, possiamo tracciare la sfera, di raggio R , circoscritta all'ottaedro (► Fig. 21).

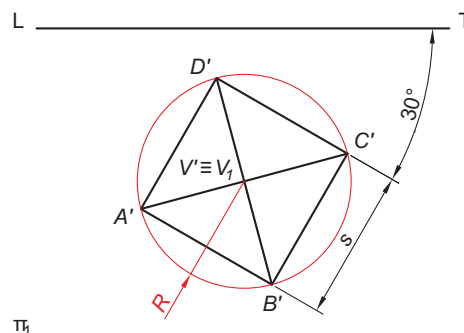
 π_2


Fig. 21

 π_1
3

- Proiettando, su π_2 , V' e V_1 si ottiene l'asse dell'ottaedro sul quale, puntando il compasso alla quota R da π_1 , possiamo determinare la sfera circoscritta al poliedro. Le intersezioni della sfera con l'asse dell'ottaedro identificano le immagini seconde V'' e V_1'' dei due vertici (► Fig. 22).

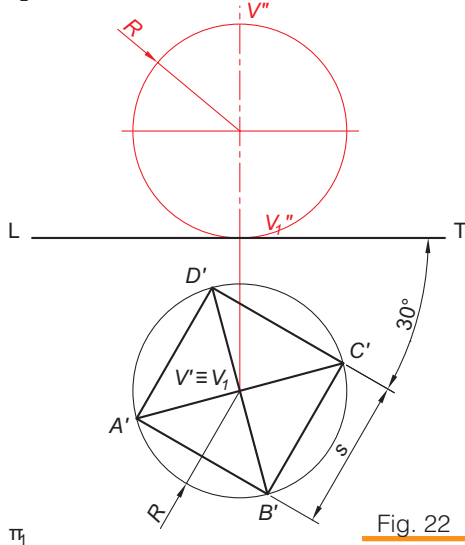
 π_2


Fig. 22

 π_1
4

- Proiettando i vertici delle basi delle piramidi sul diametro della sfera, parallelo a π_1 , si ottengono le immagini dei vertici stessi. Da notare che, a causa della rotazione dell'ottaedro rispetto a π_2 , le immagini dei vertici A e C non coincidono con gli estremi del diametro (► Fig. 23).

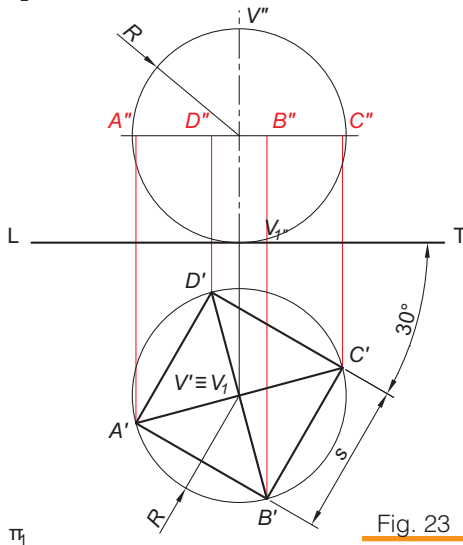
 π_2


Fig. 23

 π_1
5

- Congiungendo A'' , B'' , C'' e D'' con i due vertici V'' e V_1'' si ottiene l'immagine seconda dell'ottaedro (► Fig. 24).

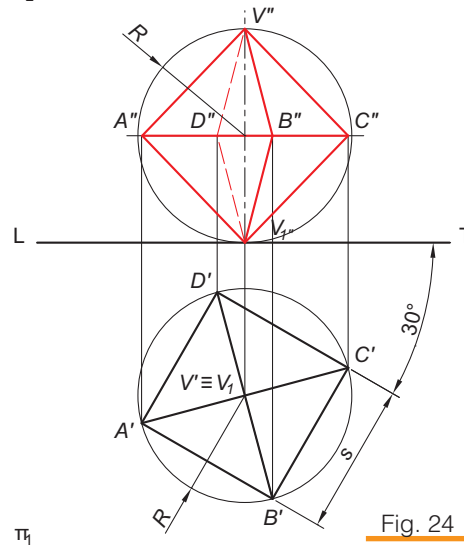
 π_2


Fig. 24

 π_1

Problema 6

Determinare le immagini di un dodecaedro avente spigolo s e giacente con una faccia su π_1 .

- Dalla geometria del dodecaedro è noto che le facce sono costituite da pentagoni regolari e che due facce opposte risultano parallele e ruotate, l'una rispetto all'altra, pari alla metà dell'angolo al centro del pentagono stesso. Si costruiscano quindi due pentagoni di lato s e centro C , paralleli a π_1 e ruotati come specificato: uno, $1-2-3-4-5$, rappresentante la base di appoggio su π_1 , l'altro, $6'-7'-8'-9'-10'$, la faccia opposta (superiore) (► Fig. 25).

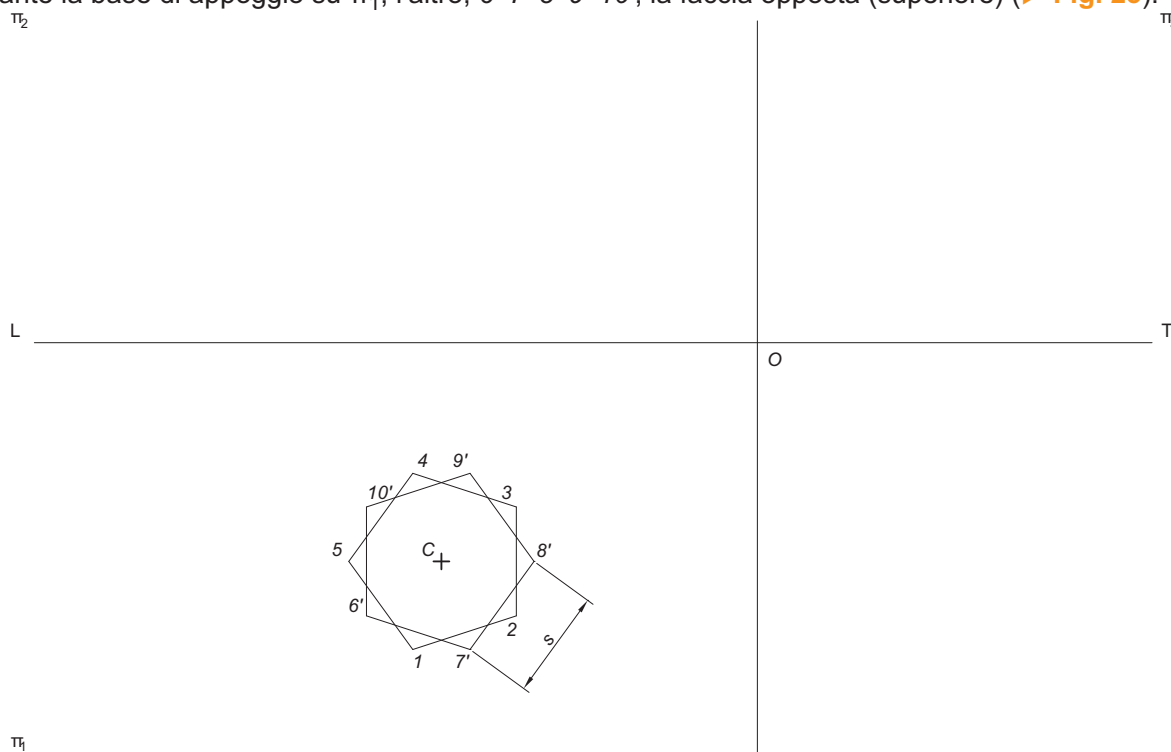


Fig. 25

- Nella vista dall'alto la faccia superiore è sicuramente visibile (si rappresenta con segno 01.2), mentre quella giacente su π_1 risulta nascosta dal corpo del solido (si rappresenta con segno 02.1). Il dodecaedro è inscrivibile in una sfera il cui raggio si determina costruendo un pentagono adiacente alla base su π_1 con il lato 2-3 in comune, del quale – tracciando un altro asse – si individua il centro. Puntando in C , con apertura nel centro dell'ultimo pentagono costruito, si descrive la sfera cercata (► Fig. 26).

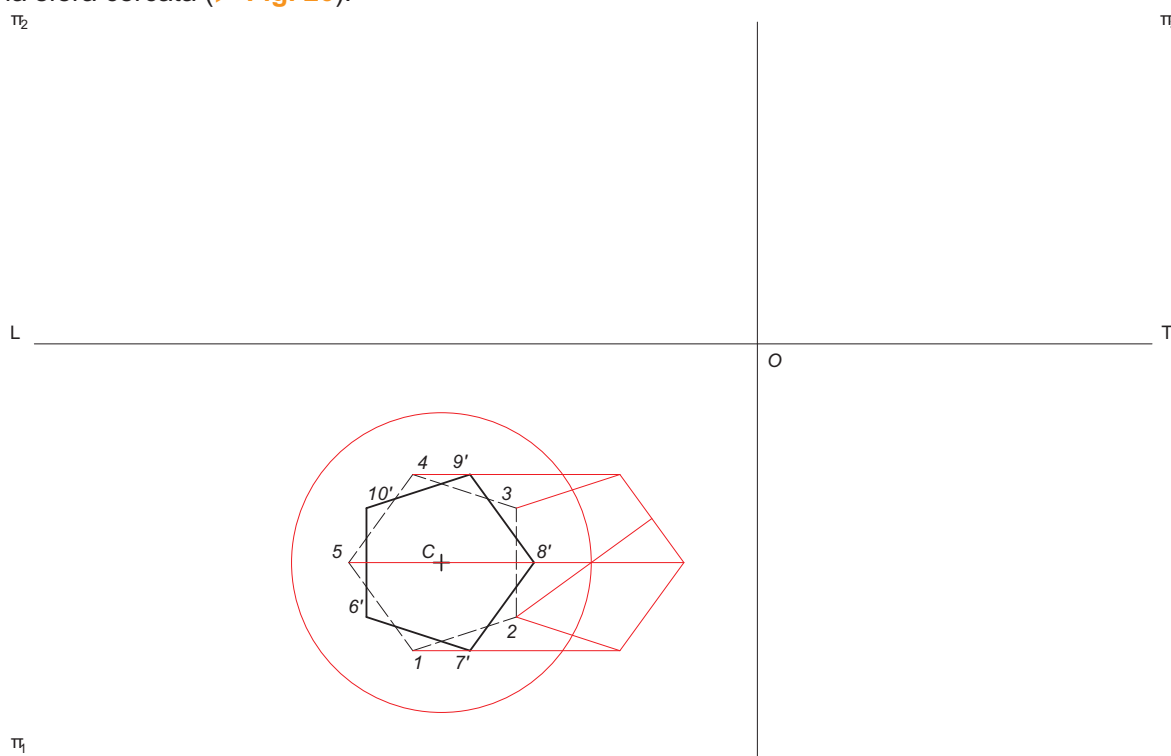


Fig. 26

- Tracciando da C per i vertici della base superiore e inferiore, si riportano i vertici stessi sulla circonferenza. Si individuano così gli spigoli del dodecaedro: quelli concorrenti ai vertici della base superiore sono in vista, mentre quelli concorrenti ai vertici della base inferiore risultano nascosti. Si completa l'immagine prima del dodecaedro congiungendo i punti individuati sulla circonferenza (► Fig. 27).

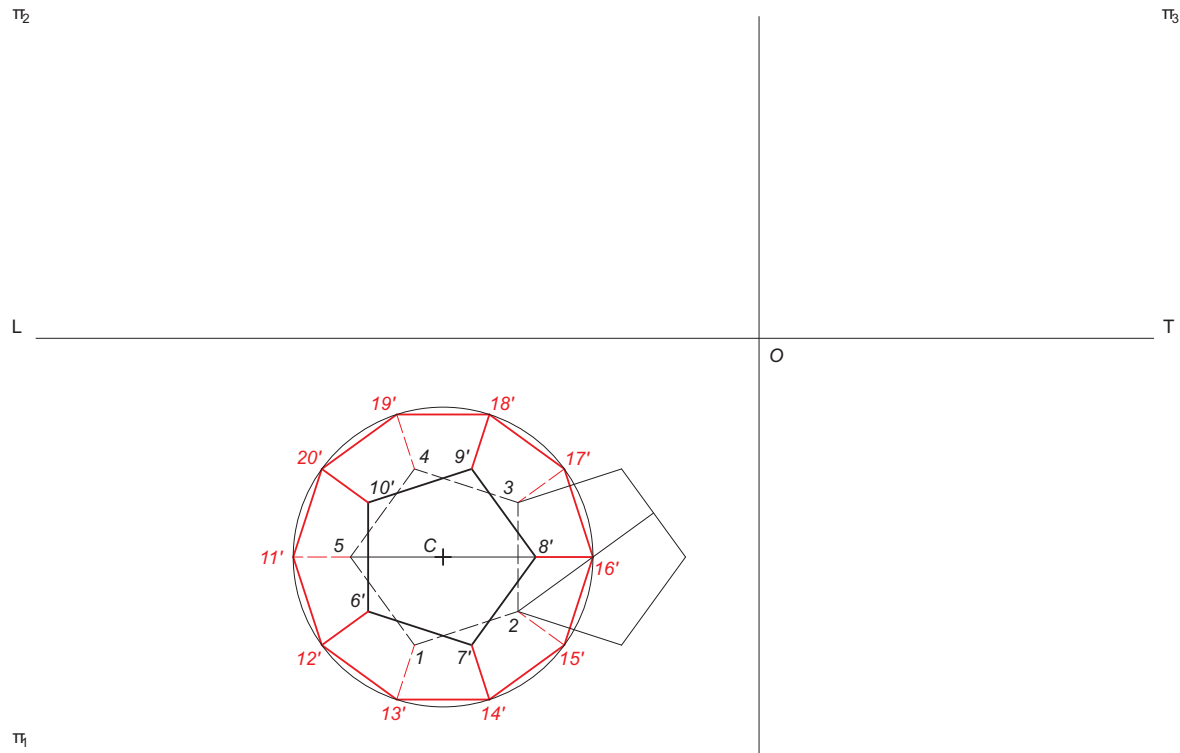


Fig. 27

- Per determinare la seconda immagine del solido è necessario ricorrere ad alcuni ribaltamenti delle facce. Considerando la faccia 2-3-17'-16'-15' (che risulta perpendicolare a π_2) si nota che il pentagono 2-3-(17')-(16')-(15'), utilizzato in precedenza per la determinazione del raggio della sfera circoscritta al dodecaedro, altro non è che il suo ribaltamento su π_1 . Proiettando la faccia considerata su π_2 e raddrizzandola si ottiene, tramite proiezione dei vertici, la sua immagine seconda che, per via dell'ortogonalità a π_2 , risulta essere di profilo (► Fig. 28).

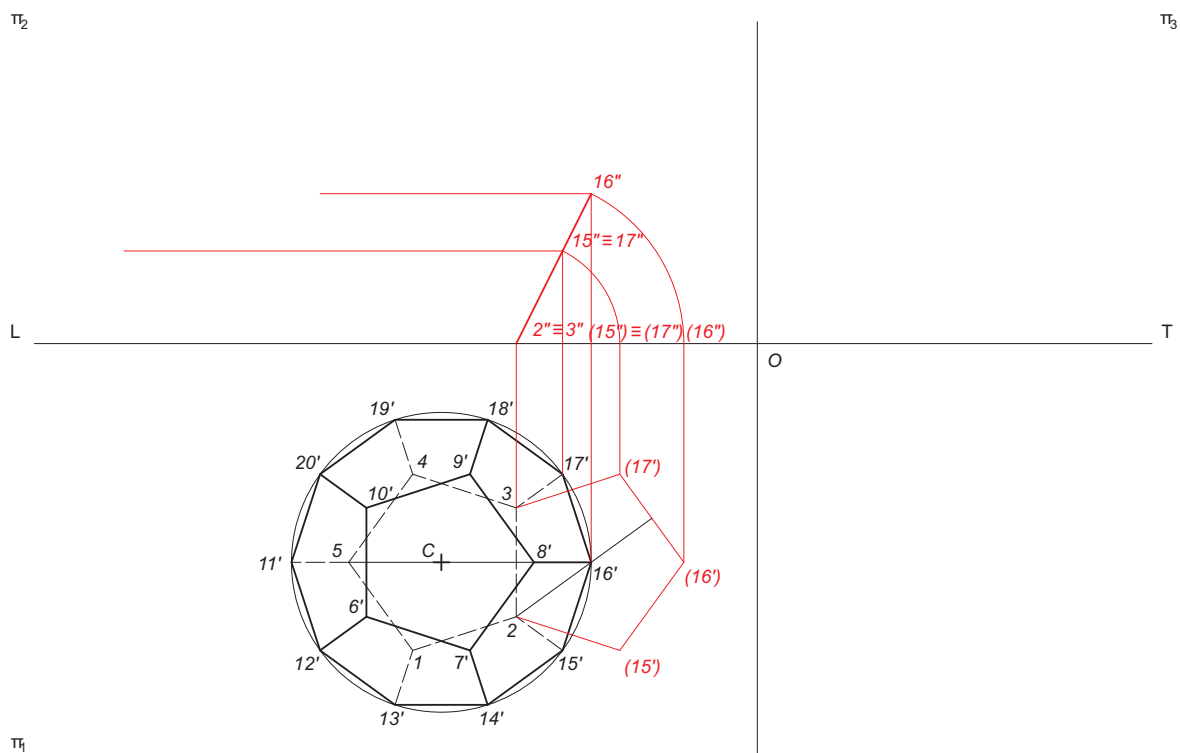


Fig. 28

■ Si ricerca, ora, l'immagine della faccia $6'-10'-20'-11'-12'$, opposta a quella appena rappresentata. Si nota che i vertici $15'$ e $17'$, della faccia di cui si è trovata l'immagine in π_2 , hanno la stessa quota del vertice $11'$ della faccia di cui si vuole determinare l'immagine. Perciò tracciando, su π_2 , il riferimento della quota dei vertici $15''$ e $17''$ e proiettando su questo $11'$ si determina $11''$. Si procede ribaltando la faccia $6'-10'-20'-11'-12'$, intorno al vertice $11'$, fino a renderla parallela a π_1 e se ne esegue, alla quota di $11''$, la proiezione su π_2 . Raddrizzandola si determinano le immagini dei rimanenti vertici (► Fig. 29).

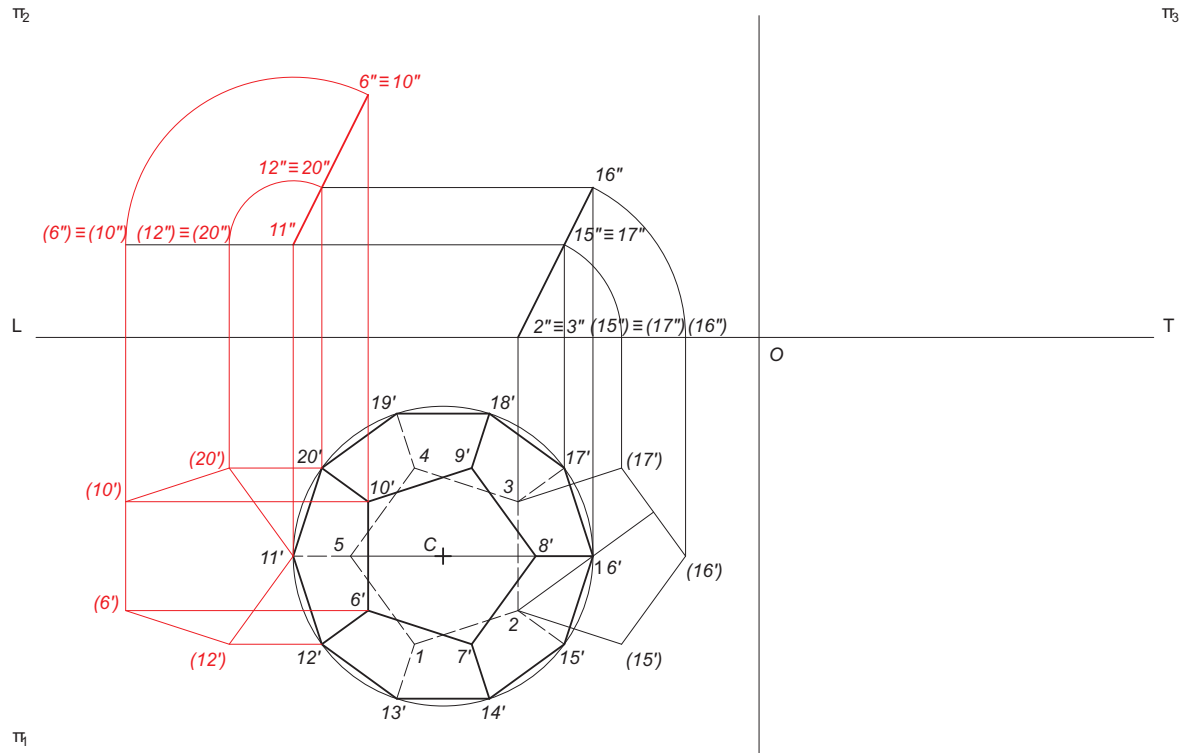


Fig. 29

■ Individuate, su π_2 , le quote dei vertici delle facce connesse alla base superiore e a quella inferiore, operando per proiezione, dalle immagini su π_1 , si determinano le immagini seconde dei vertici del solido che, congiunti, generano le immagini degli spigoli del dodecaedro (► Fig. 30).

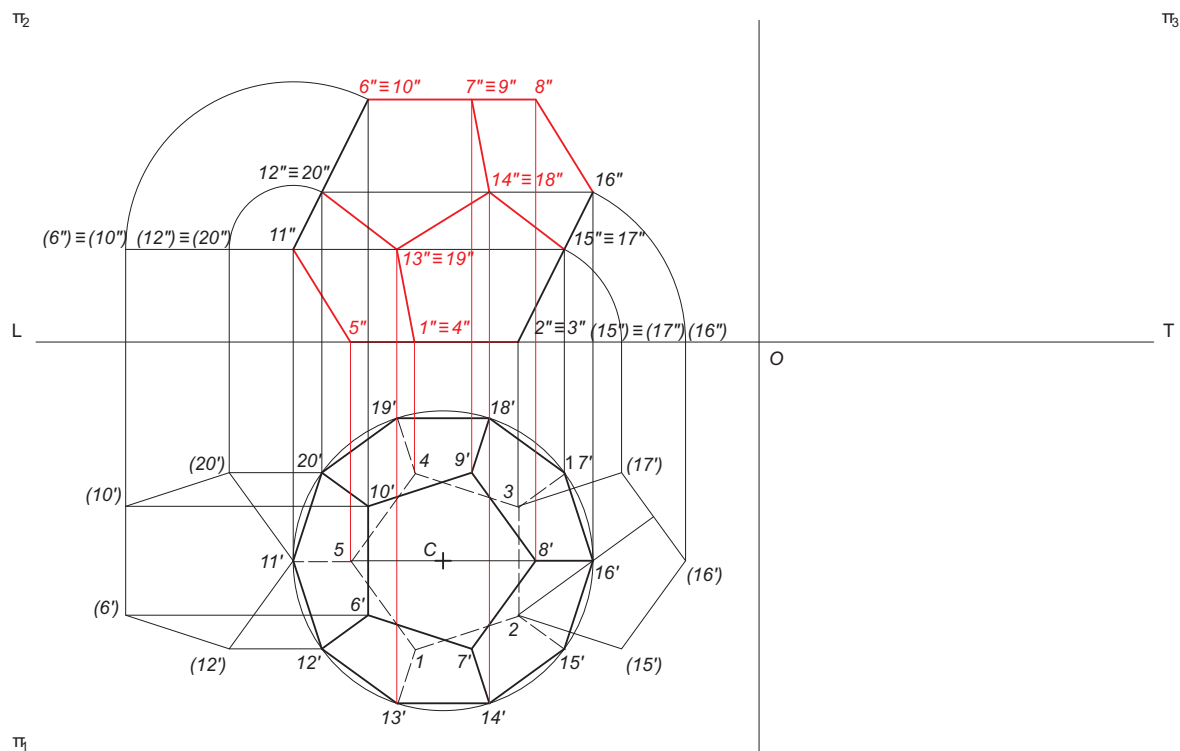


Fig. 30

■ Proiettando e ribaltando da π_1 e proiettando da π_2 si ottiene la vista da sinistra del dodecaedro (► Fig. 31).

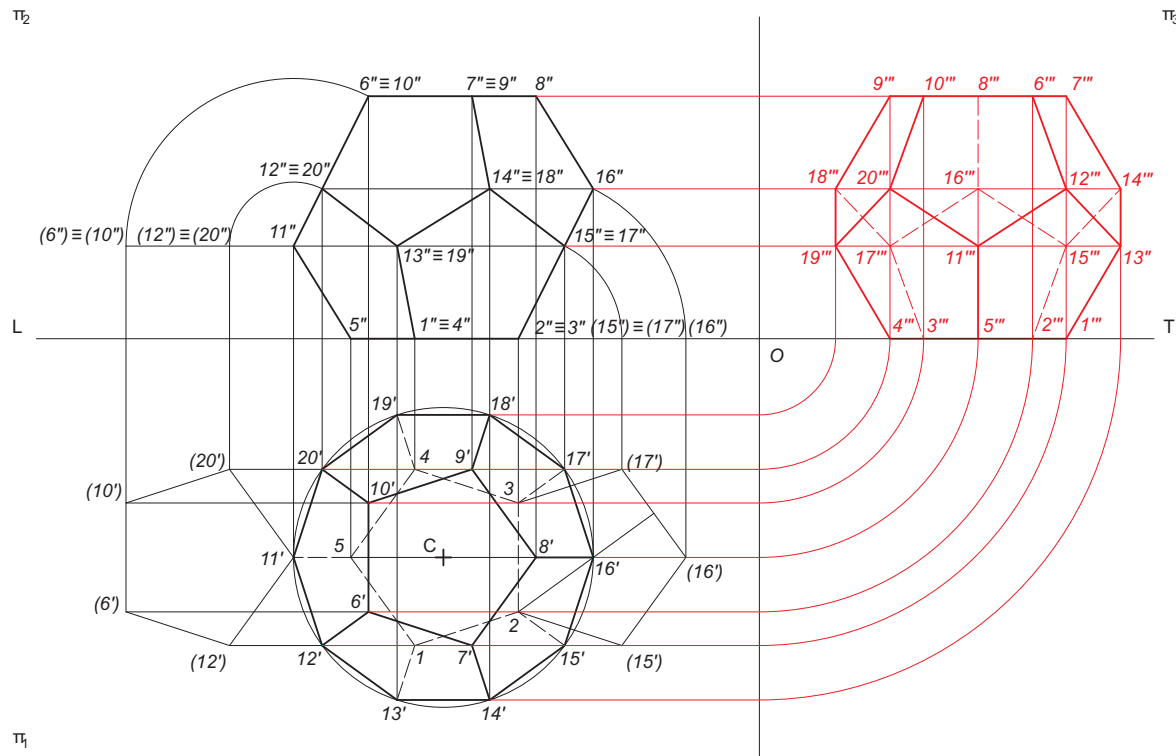


Fig. 31

Problema 7

Determinare le immagini di un ottaedro di spigolo s giacente con una faccia su π_1 e asse parallelo a π_2 .

- Per svolgere l'esercizio si riprende quanto illustrato, in questa stessa sezione, nella soluzione del Problema 2 costruendo la figura ribaltata: un ottaedro con un vertice su π_1 e l'asse $\perp \pi_1$ (► Fig. 32).

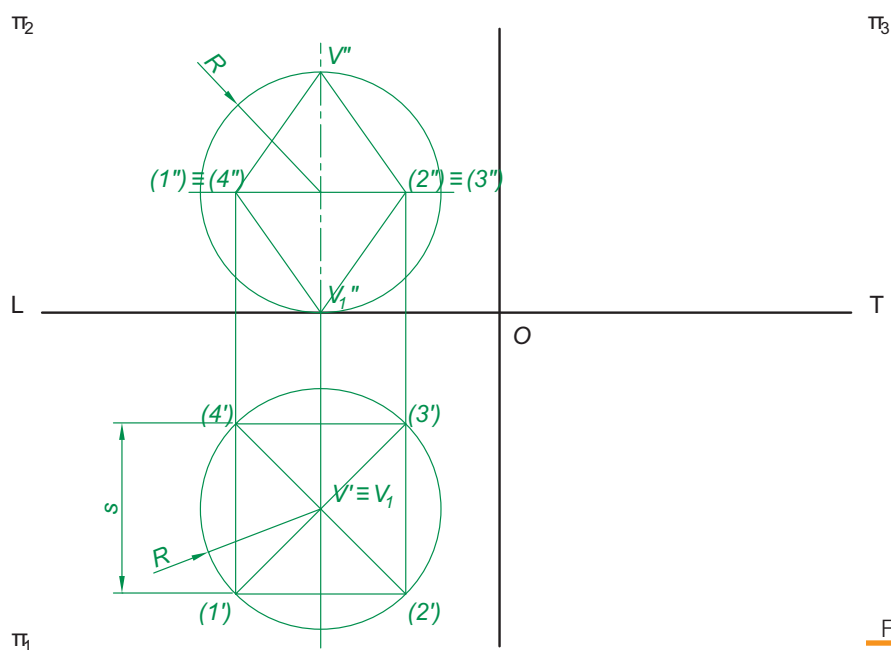


Fig. 32

- Su π_2 si ruota il solido attorno al vertice V_1'' (giacente su π_1) fino a far adagiare la faccia $(1'')-(4'')-V_1''$ su π_1 ottenendo il solido raddrizzato (► Fig. 33).

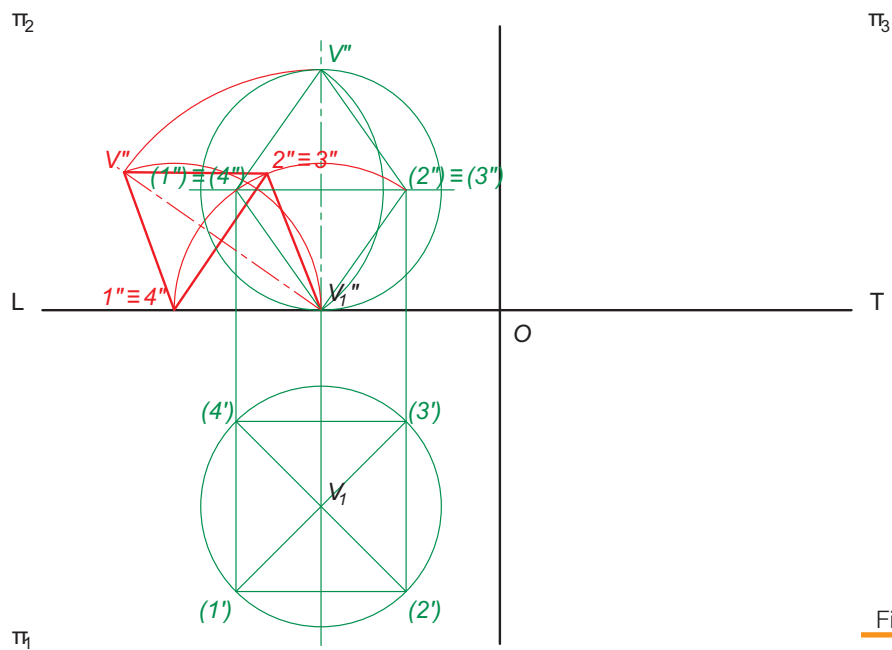


Fig. 33

- Si proiettano le immagini seconde dei vertici dell'ottaedro raddrizzato su π_1 e, in corrispondenza con i vertici della figura di costruzione (ribaltata), si determinano le immagini prime dei vertici del solido. La visione dall'alto determina che la faccia 1- V_1 -4, giacente su π_1 , sia nascosta come pure le facce a essa adiacenti (► Fig. 34).

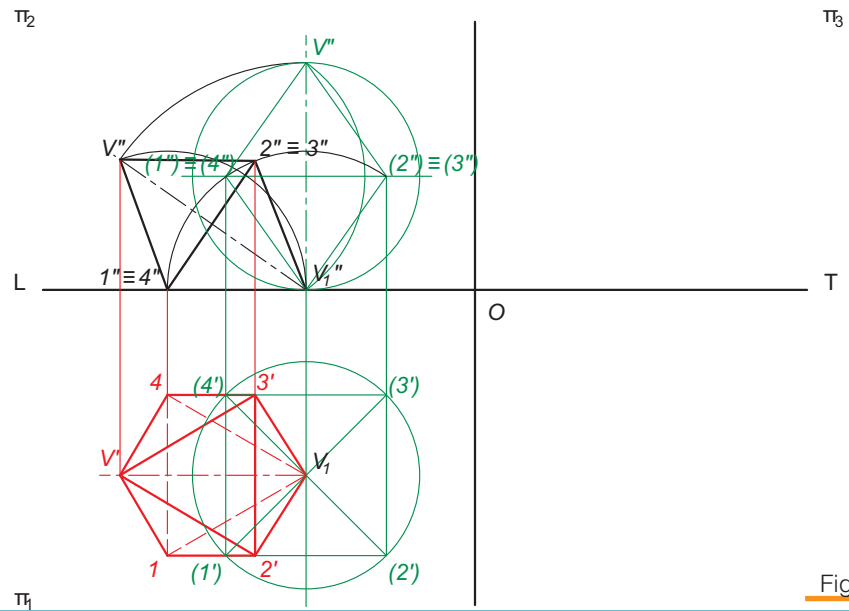


Fig. 34

- Proiettando e ribaltando da π_1 e proiettando da π_2 si ottiene, su π_3 , la vista da sinistra dell'ottaedro adagiato su π_1 con una faccia (► Fig. 35).

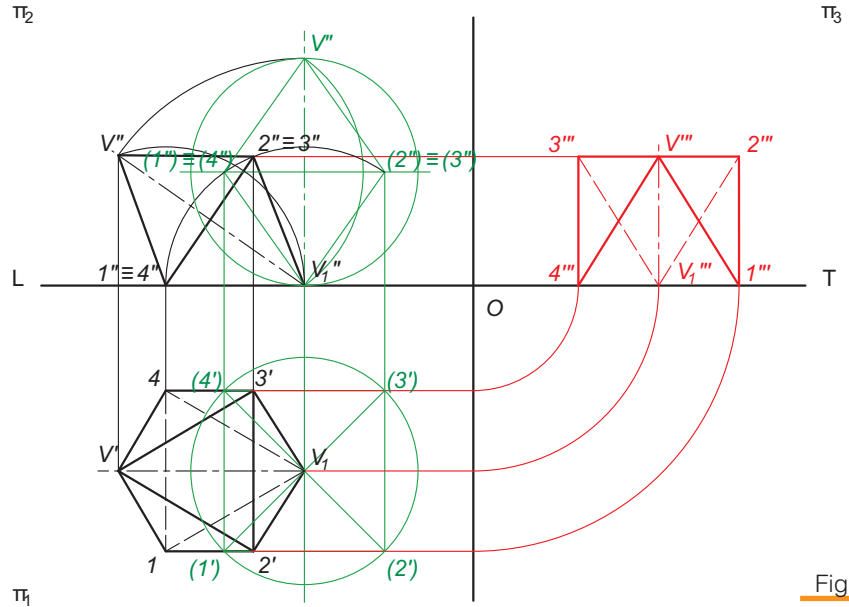


Fig. 35

- Nella rappresentazione descrittiva l'utilizzo, per le facce in vista, della campitura solida – in tonalità dello stesso colore – ne rende più agevole la lettura, restituendo anche un buon effetto di tridimensionalità al disegno (► Fig. 36).

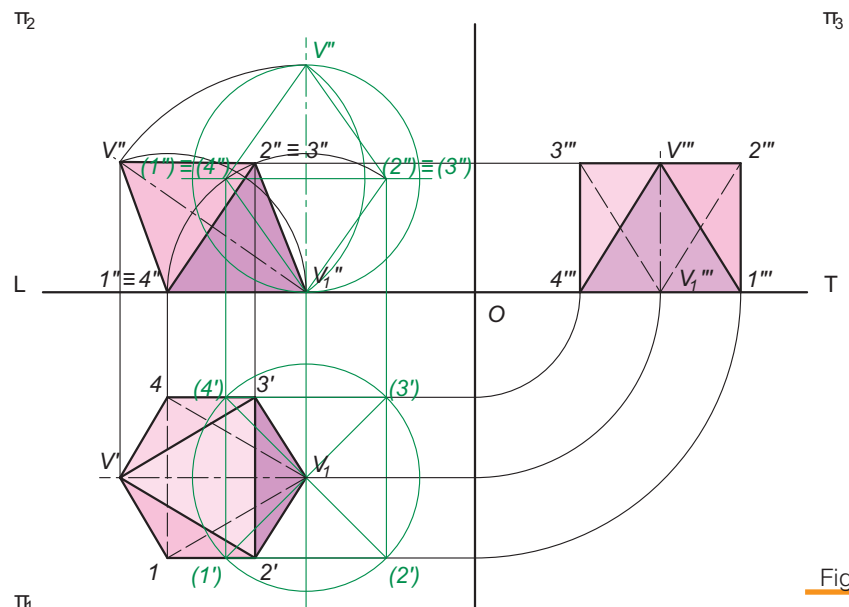


Fig. 36