



PROBLEMI SVOLTI: SEZIONI DI SOLIDI

Problema 1

Determinare, nelle proiezioni ortogonali, la sezione di un ottaedro di spigolo s , giacente con una faccia su π_1 e avente l'asse parallelo a π_2 , ottenuta con un piano $\alpha \parallel \pi_2$.

- Si esegue la figura preparatoria rappresentando, con linea 01.1, l'ottaedro sui tre quadri e si inserisce il piano α individuato dalle sue tracce $t_{1\alpha}$ e $t_{3\alpha}$ (► Fig. 1).

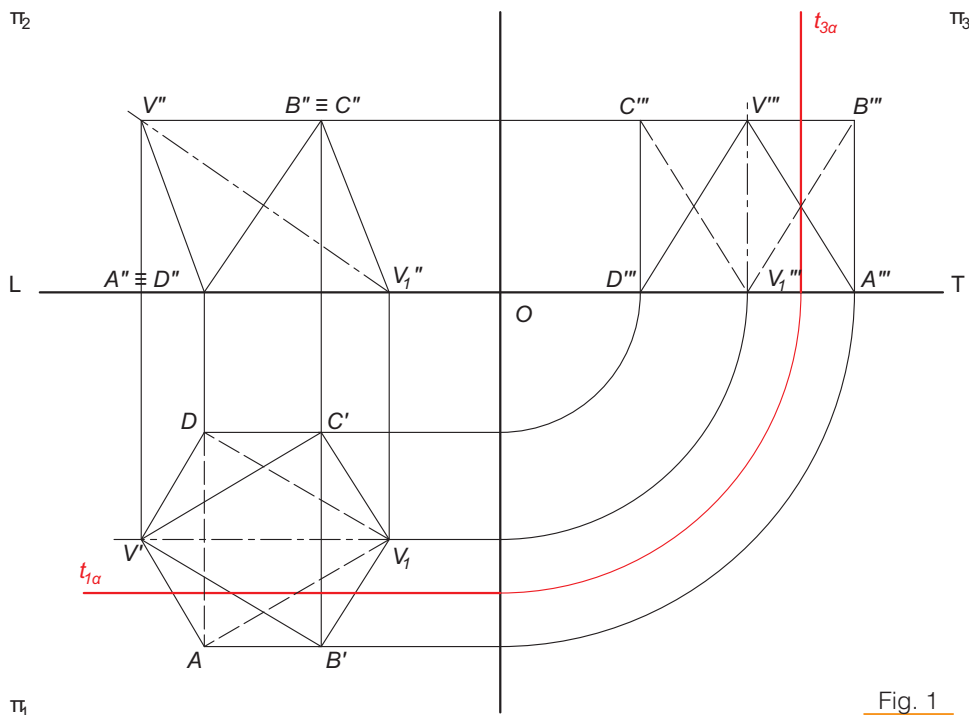


Fig. 1

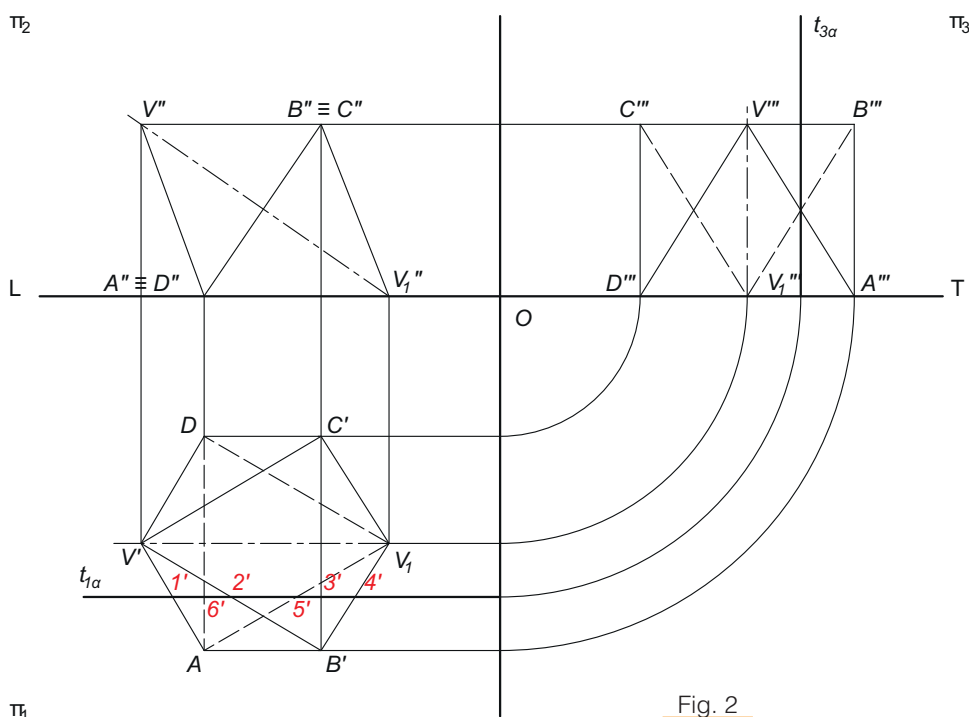


Fig. 2

- Il piano α risulta proiettante in prima posizione: di conseguenza su π_1 le immagini dei punti intersezione degli spigoli del solido con il piano giacciono sulla traccia $t_{1\alpha}$ e sono subito individuabili. Seguendo la traccia $t_{1\alpha}$ da sinistra a destra, considerando la parte in vista del solido (spigoli disegnati con linea continua), si individuano le intersezioni con: $V'A$ indicata con $1'$, $V'B'$ indicata con $2'$, $B'C'$ indicata con $3'$ e infine V_1B' indicata con $4'$. Si considerano ora gli spigoli nascosti dell'ottaedro (disegnati con linea a tratti) individuando i punti $5'$ sullo spigolo V_1A e $6'$ su AD (► Fig. 2).

- Proiettando su π_2 i punti intersezione appena individuati si determinano le loro immagini seconde sugli spigoli corrispondenti. Così $1''$ giacerà su $V''A''$, $2''$ si troverà su $V''B''$, $3''$ coinciderà con B'' e C'' , e così di seguito. Determinate le immagini seconde dei vertici della superficie di sezione se ne individuano i contorni congiungendo in sequenza i punti trovati utilizzando la linea continua grossa (linea 01.2). Si ottiene così un poligono di forma esagonale la cui superficie è evidenziata con la specifica campitura delle sezioni (► Fig. 3).

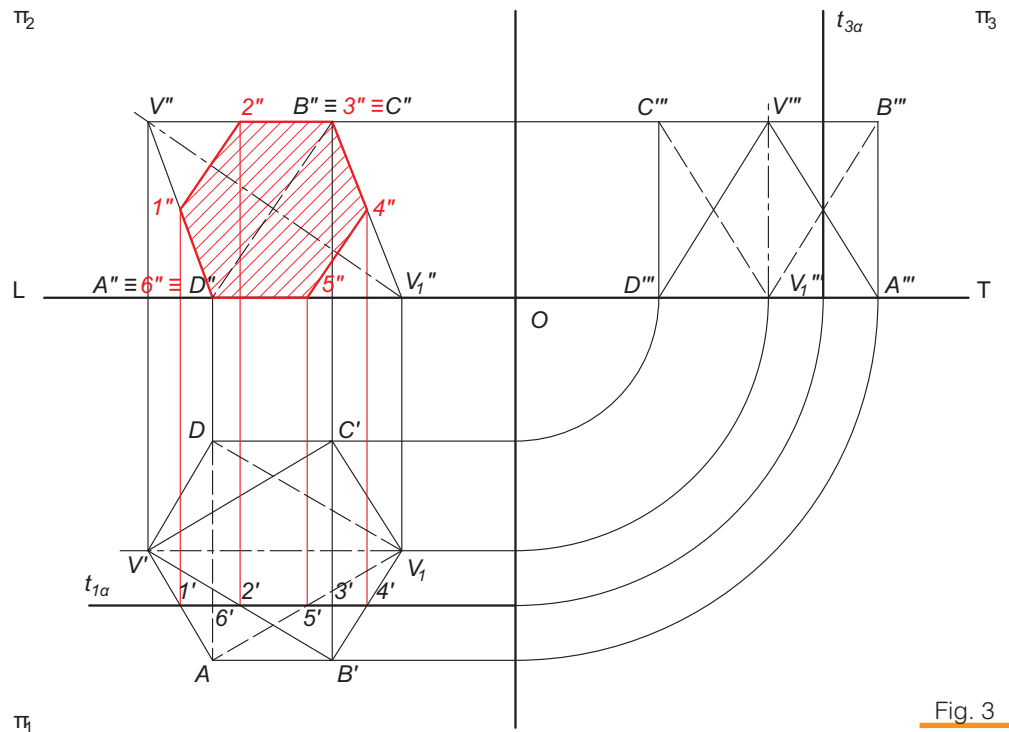


Fig. 3

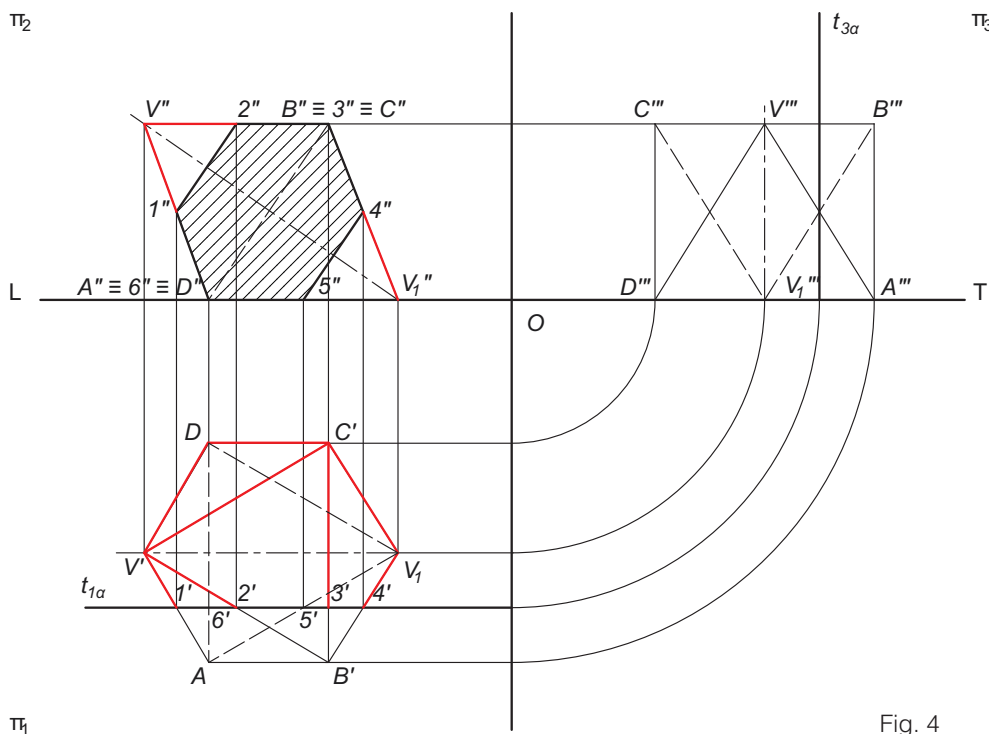


Fig. 4

- Trovata la sezione è possibile differenziare, con segno 01.2, gli spigoli o le porzioni di spigolo che, eliminata la parte eccedente del solido, restano visibili. Su π_1 , riferendosi al vertice V' , si ingrossano: $V'1'$, $V'2'$, $V'C'$ e $V'D$. Relativamente al vertice C' gli spigoli interessati sono: $C'D$, $C'3'$ e $C'V_1$; infine, la porzione di spigolo $V'4'$. Su π_2 , riferendosi dal vertice V'' , gli spigoli $V''1''$ e $V''2''$ e per concludere lo spigolo $V_1''4''$ (► Fig. 4).

■ La rappresentazione dell'ottaedro sezionato con un piano $\alpha \parallel \pi_2$ si completa con l'esecuzione della terza vista individuando le immagini dei punti di intersezione giacenti sulla traccia $t_{3\alpha}$ (il piano α risulta proiettante anche rispetto a π_3) e differenziando, con segno 01.2, gli spigoli o le porzioni di spigolo che, eliminata la parte di non interesse del solido, restano visibili (► Fig. 5).

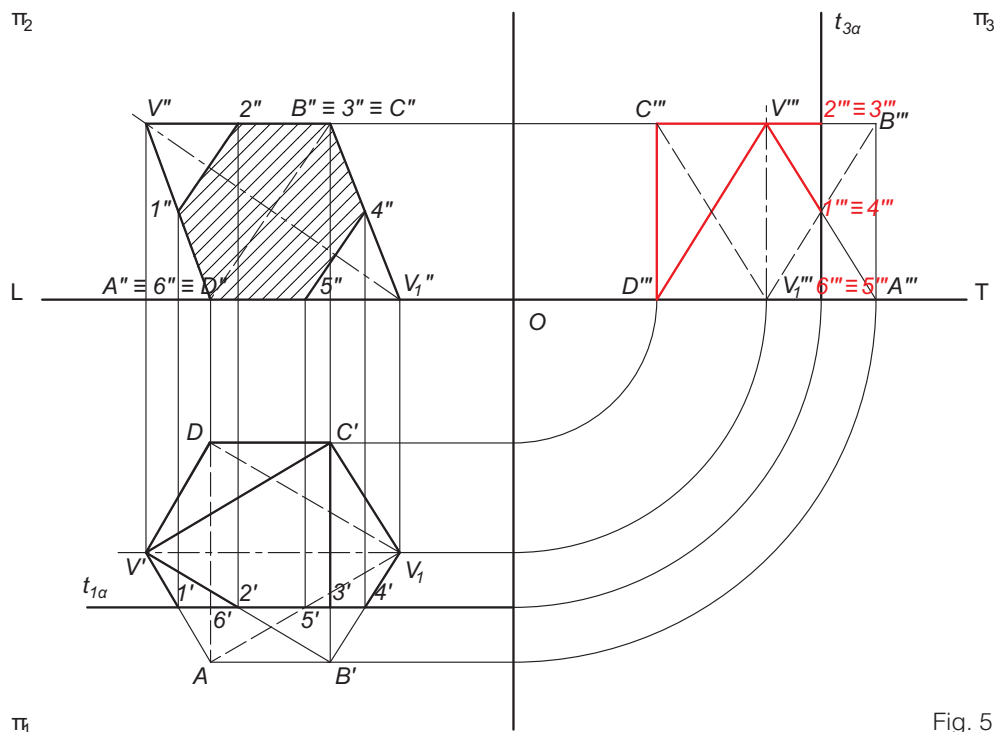


Fig. 5

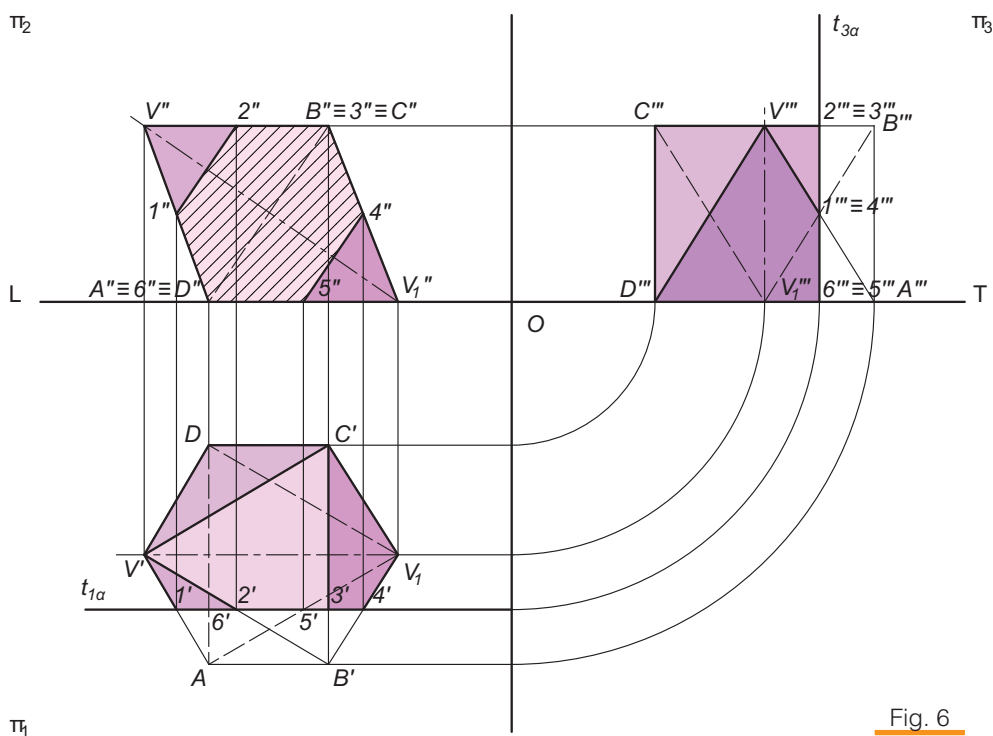


Fig. 6

■ La rappresentazione descrittiva dell'ottaedro sezionato può essere migliorata, ricreando un interessante effetto di tridimensionalità, mediante l'impiego di una campitura solida – in tonalità dello stesso colore – che restituisce al disegno anche una più agevole lettura (► Fig. 6).

Problema 2

Determinare, nelle proiezioni ortogonali, la sezione di un parallelepipedo ottenuta con un piano $\alpha \perp \pi_2 \angle \beta^\circ \pi_1$. Siano l , p e h rispettivamente la larghezza, la profondità e l'altezza del parallelepipedo.

- Si esegue la figura preparatoria rappresentando, con linea continua fine, il parallelepipedo sui tre quadri e si inserisce il piano α individuato dalle sue tracce $t_{1\alpha}$, $t_{2\alpha}$ e $t_{3\alpha}$ (► Fig. 7).

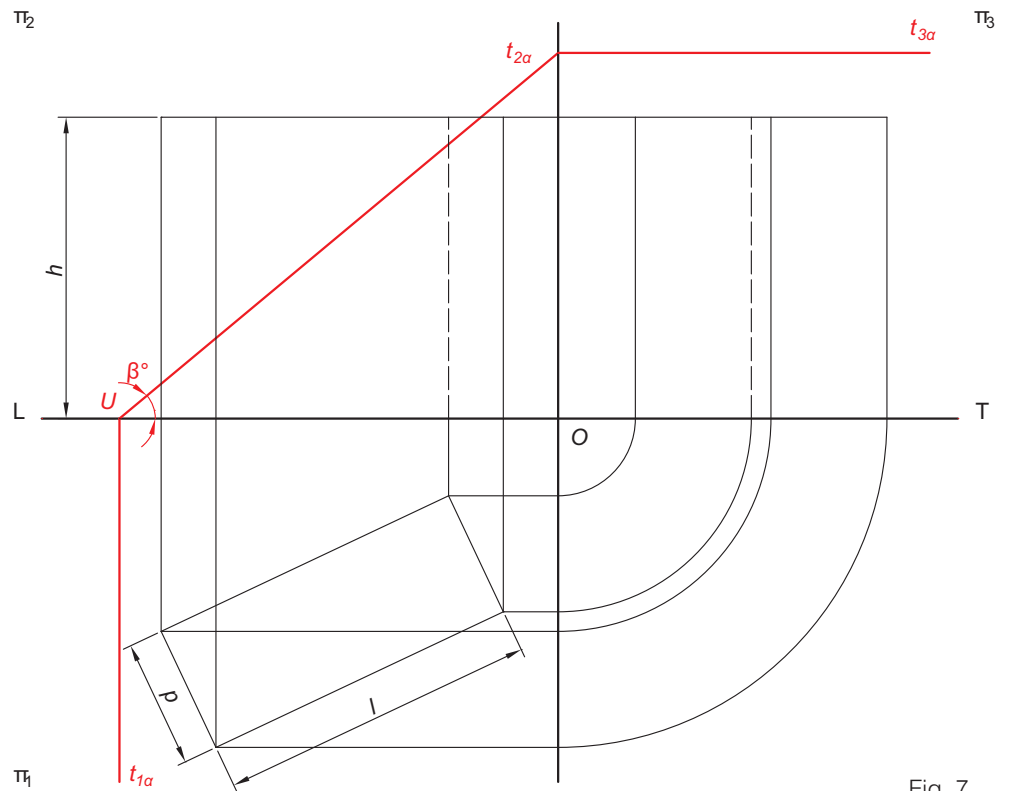
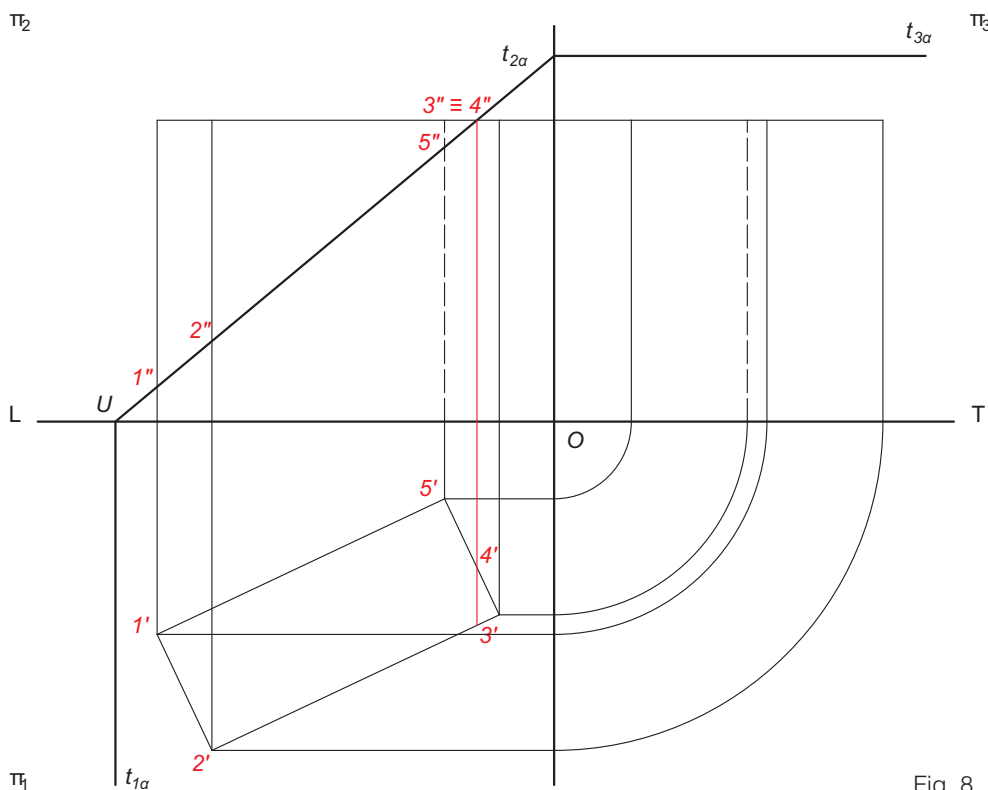


Fig. 7



- Il piano α , perpendicolare a π_2 , è proiettante in seconda posizione: di conseguenza, su π_2 , le immagini dei punti intersezione degli spigoli del parallelepipedo con il piano α si trovano sulla traccia $t_{2\alpha}$ e sono direttamente individuabili. Il piano di sezione interseca ogni spigolo in un unico punto così si individuano $1''$, $2''$. Anche la base superiore è tagliata dal piano: ne interseca due lati determinando $3''$ e $4''$. Sull'ultimo spigolo, quello non in vista, si individua $5''$. Proiettando su π_1 i punti intersezione si trovano le loro immagini prime (► Fig. 8).

Fig. 8

■ Determinate le immagini prime dei vertici della superficie di sezione se ne individuano i contorni congiungendo, in sequenza, i punti trovati utilizzando la linea continua grossa (linea 01.2). Si ottiene così una figura piana irregolare formata da cinque lati la cui superficie viene evidenziata con la specifica campitura delle sezioni (► **Fig. 9**).

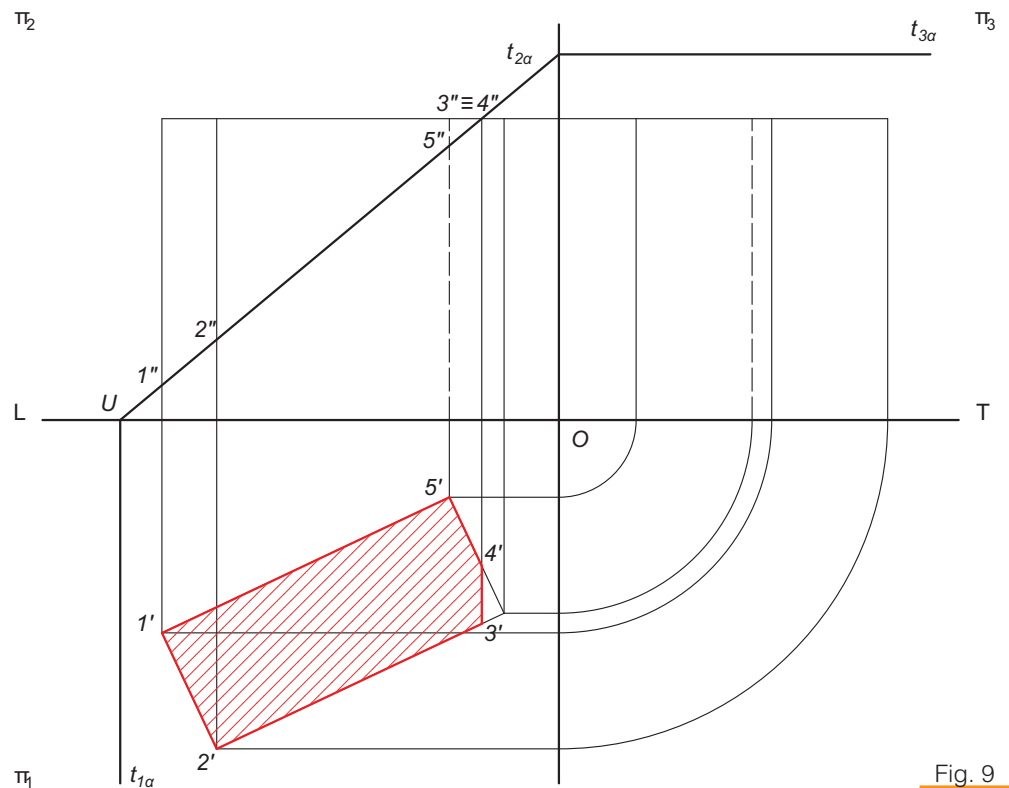
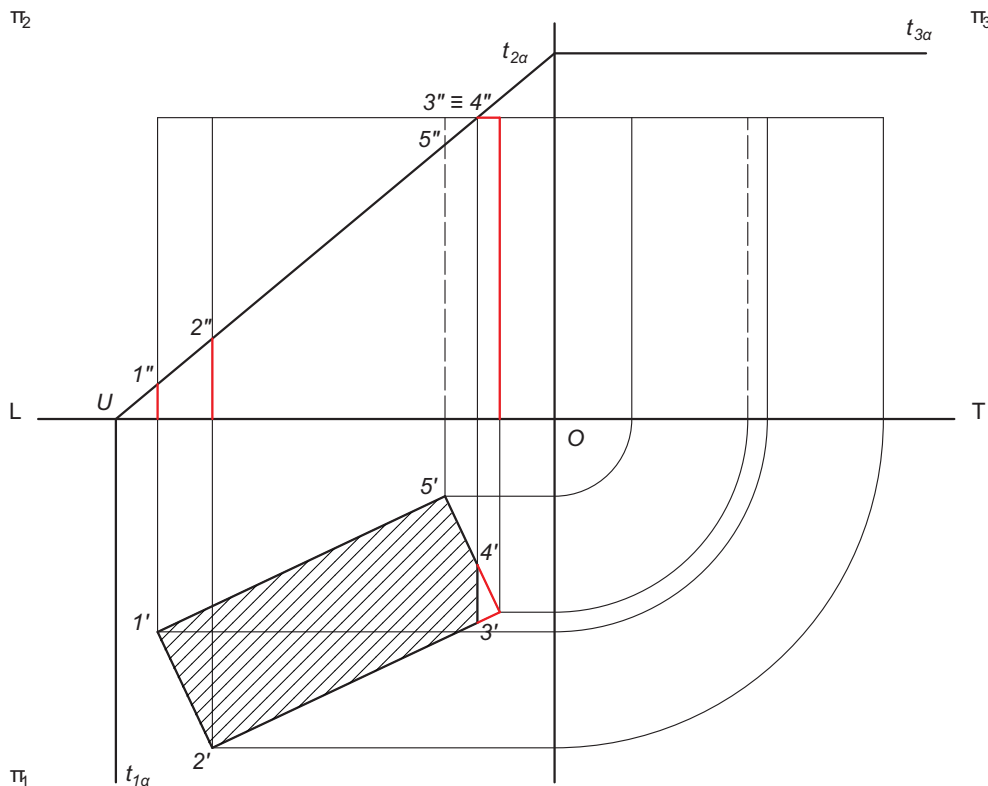


Fig. 9



■ Trovata la sezione, è possibile individuare gli spigoli o le porzioni di spigolo che, eliminata la parte eccedente del parallelepipedo, restano visibili, e poterli così differenziare con segno 01.2. Su π_1 risultano visibili solamente due piccoli tratti relativi ai due lati della base superiore sezionati dal piano concorrenti nei punti 3' e 4'; su π_2 i tratti di spigolo terminanti nei punti 1'' e 2'', nonché tutto lo spigolo all'estrema destra del solido che non è intersecato dal piano di sezione (► **Fig. 10**).

Fig. 10

■ Per determinare la terza vista si proiettano da π_2 le immagini dei punti intersezione $1''$, $2''$ e $5''$ individuando in π_3 , sugli spigoli corrispondenti, le terze immagini dei vertici della superficie di sezione. Le proiezioni dei punti $3''$ e $4''$ non forniscono in π_3 la posizione delle immagini. Si ricorre così a π_1 proiettando i punti $3'$ e $4'$ e determinando, sulla base superiore, $3'''$ e $4'''$. Congiungendo in sequenza, con linea 01.2, i punti trovati si individuano i contorni della superficie di sezione da campire. Si perfeziona il disegno differenziando con segno 01.2 le porzioni di spigolo che restano visibili, eliminata la parte eccedente del solido (► Fig. 11).

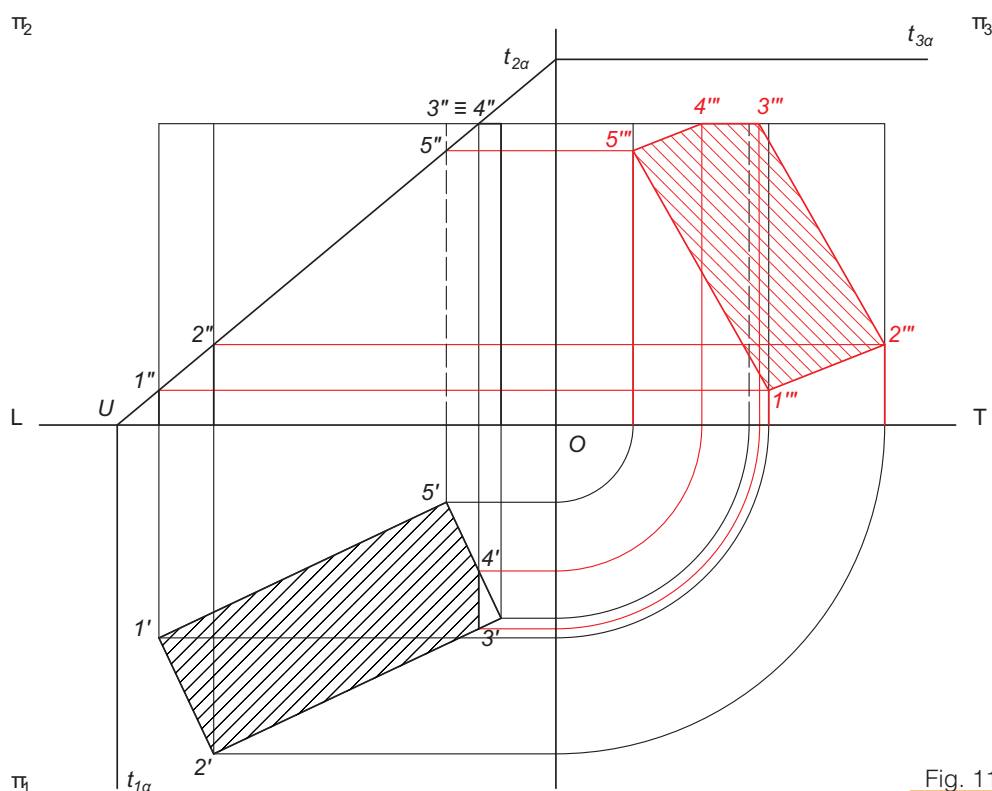
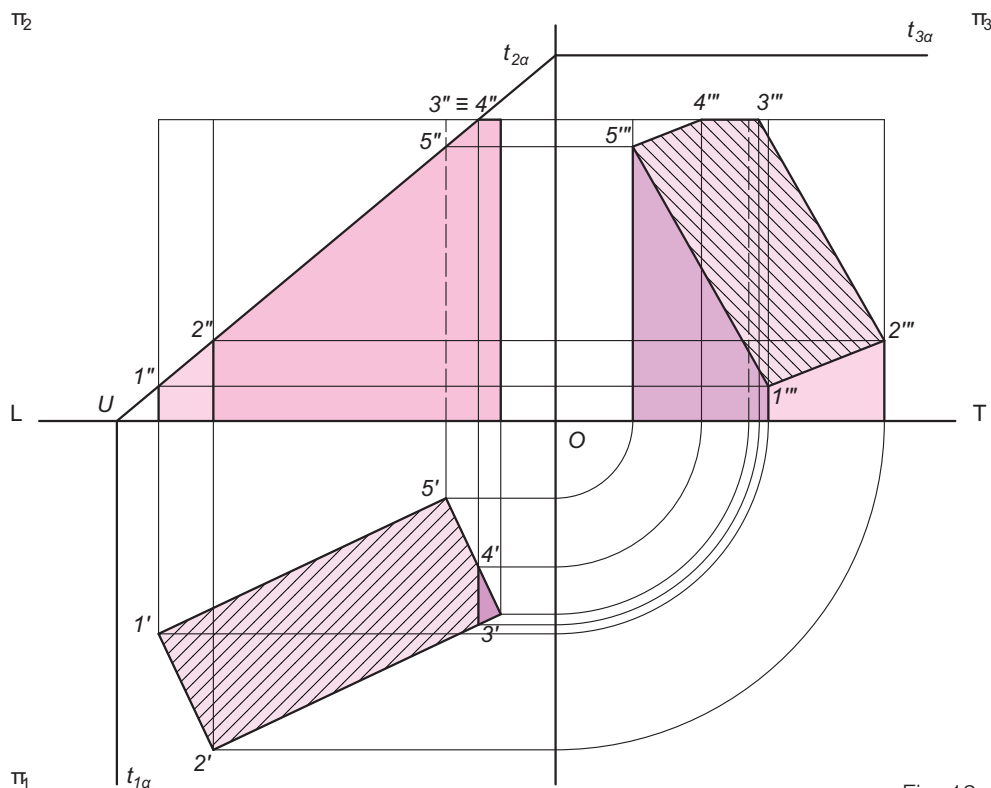


Fig. 11



■ La rappresentazione descrittiva della sezione del parallelepipedo può essere migliorata, ricercando un effetto di tridimensionalità, mediante l'impiego di una campitura solida – in tonalità dello stesso colore – che, oltretutto, consente di restituire al disegno una più chiara interpretazione (► Fig. 12).

Fig. 12

Problema 3

Determinare la sezione di un dodecaedro di spigolo s , appoggiato su π_1 con una faccia, ottenuta con un piano $\alpha \perp \pi_3 \angle \beta^\circ \pi_1$ come indicato in figura (► Fig. 13).

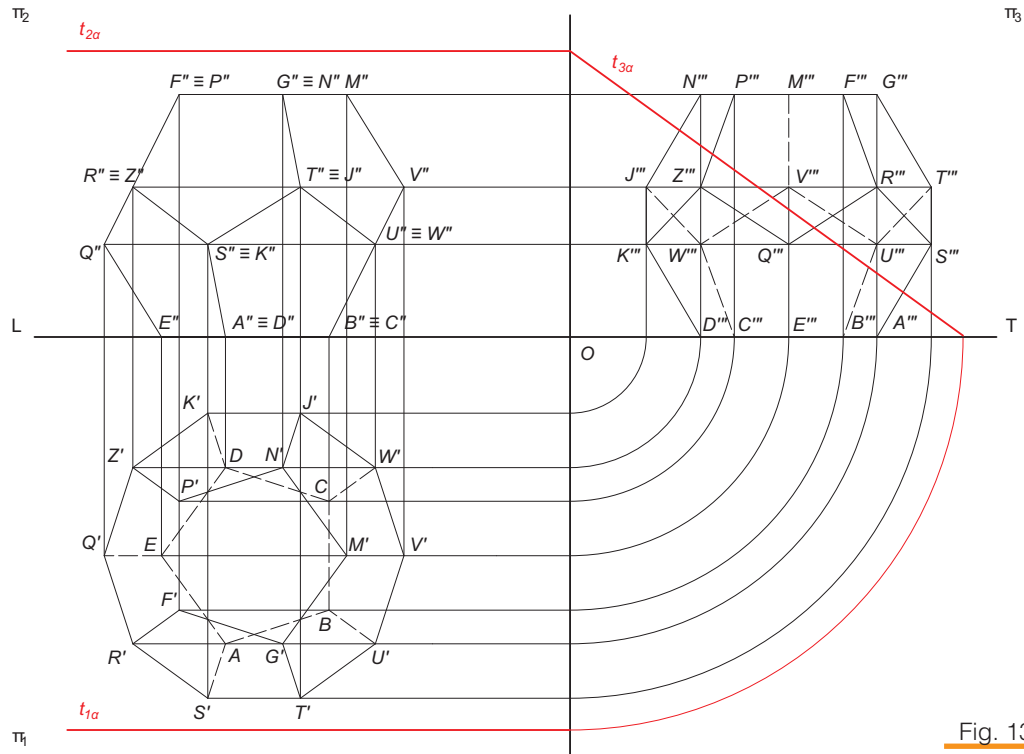


Fig. 13

■ Il piano α è terzo proiettante: ciò determina che su π_3 le immagini dei punti intersezione degli spigoli del dodecaedro con il piano α si collochino sulla traccia $t_{3\alpha}$ e siano individuati dalle intersezioni della $t_{3\alpha}$ con le immagini degli spigoli stessi così: $A'''S'''$ è sezionato in $1'''$, $Q'''R'''$ in $2'''$, $Z'''P'''$ in $3'''$, $J'''N'''$ in $4'''$, $W'''V'''$ in $5'''$ e $B'''U'''$ in $6'''$. Con il taglio la porzione di solido al di sopra del piano risulta eccedente e si evidenzia, con linea 01.2, solo ciò che rimane visibile: gli spigoli $K'''D'''$, $K'''J'''$, $K'''Z'''$, $Q'''Z'''$ e $Q'''E'''$ e le porzioni di spigolo $A'''1'''$, $Q'''2'''$, $Z'''3'''$ e $J'''4'''$ (► Fig. 14).

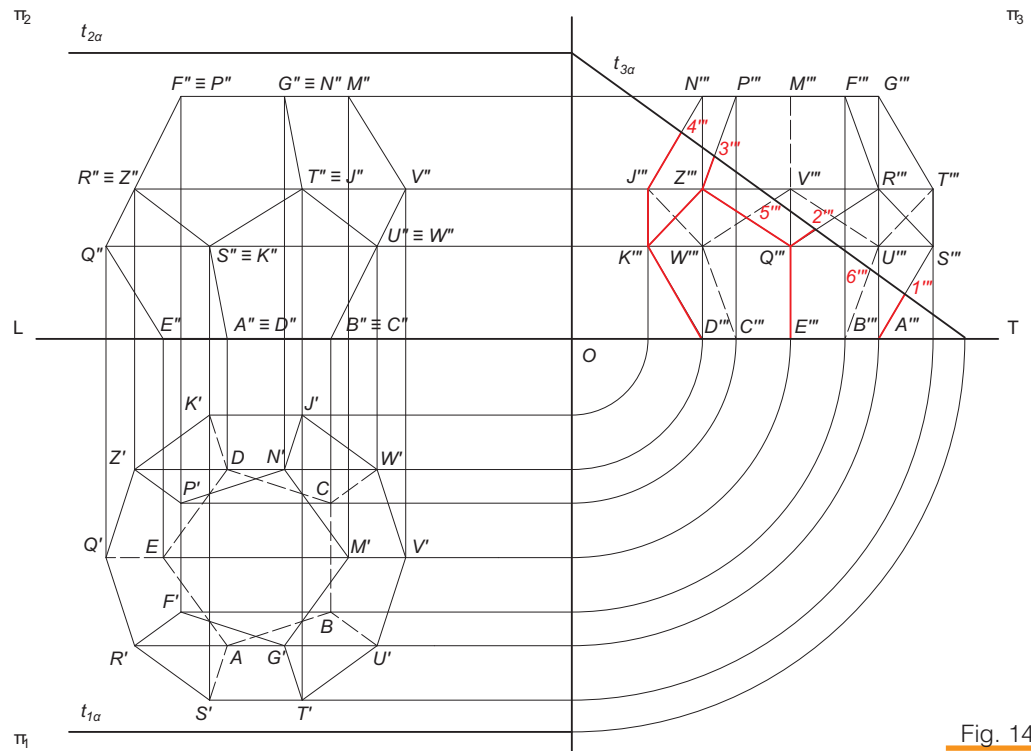


Fig. 14

- Si proiettano i punti intersezione $1''$, $2''$, $3''$, $4''$, $5''$ e $6''$ su π_2 e si determinano, sugli spigoli corrispondenti, le immagini seconde dei vertici della superficie di sezione. Congiungendo in sequenza, con linea 01.2, le immagini seconde dei punti di intersezione, si individuano i contorni della superficie di sezione che si evidenzia con la specifica campitura. Lo spigolo $E''Q''$ e le porzioni di spigolo $A''1''$, $B''6''$ e $Q''2''$ della parte di solido che rimane visibile si ingrossano con linea 01.2. Gli spigoli nascosti si disegnano con linea 02.1 (► Fig. 15).

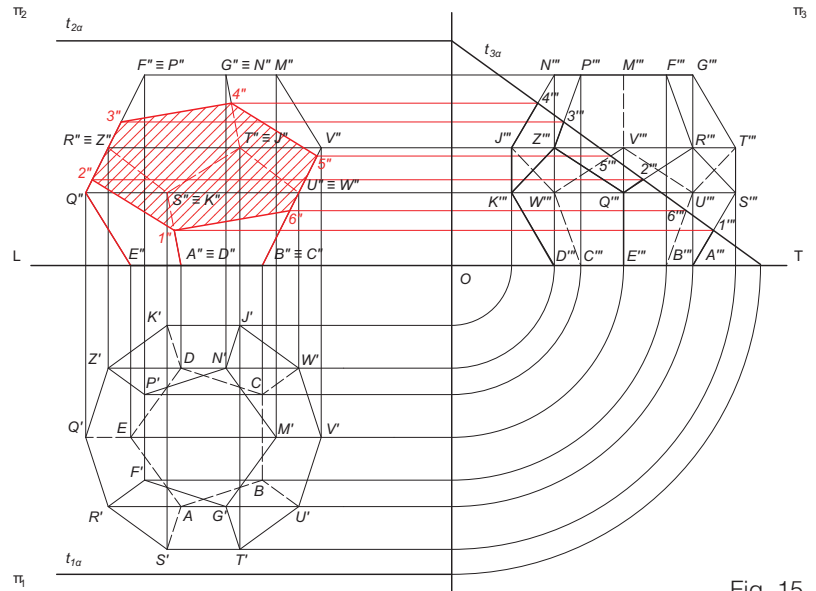


Fig. 15

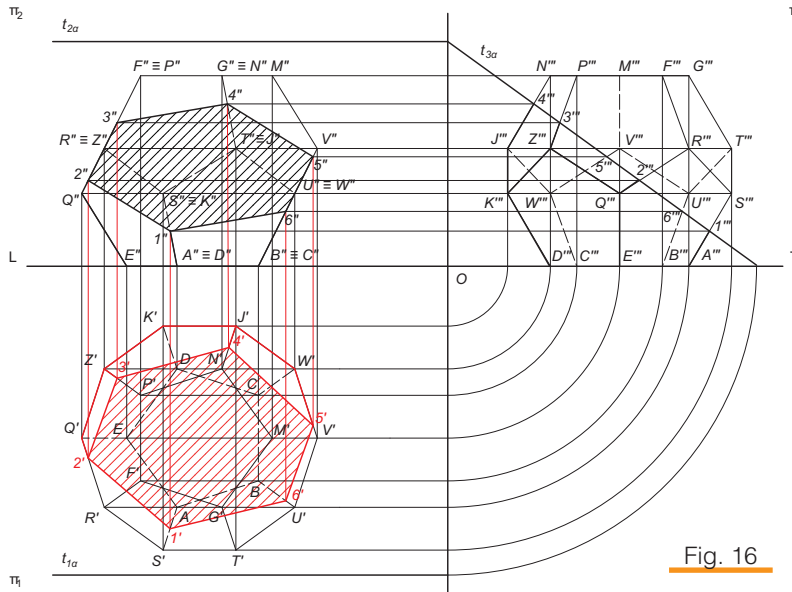


Fig. 16

- Determinata la superficie di sezione in π_2 se ne proiettano i vertici su π_1 individuando, sugli spigoli corrispondenti, le immagini prime dei vertici della superficie di sezione che congiunti in sequenza, con linea 01.2, permettono di individuarne i contorni. La sezione viene quindi campita con linee continue fini (linea 01.1) uniformemente spaziate e inclinate di 45° . Si completa la vista differenziando in segno 01.2 le porzioni degli spigoli che, eliminata la parte eccedente del solido, restano visibili (► Fig. 16).

- La rappresentazione descrittiva della sezione della piramide può essere migliorata, ricercando un effetto di tridimensionalità, mediante l'impiego di una campitura solida – in tonalità dello stesso colore – che, oltretutto, contribuisce a fornire al disegno una più chiara interpretazione (► Fig. 17).

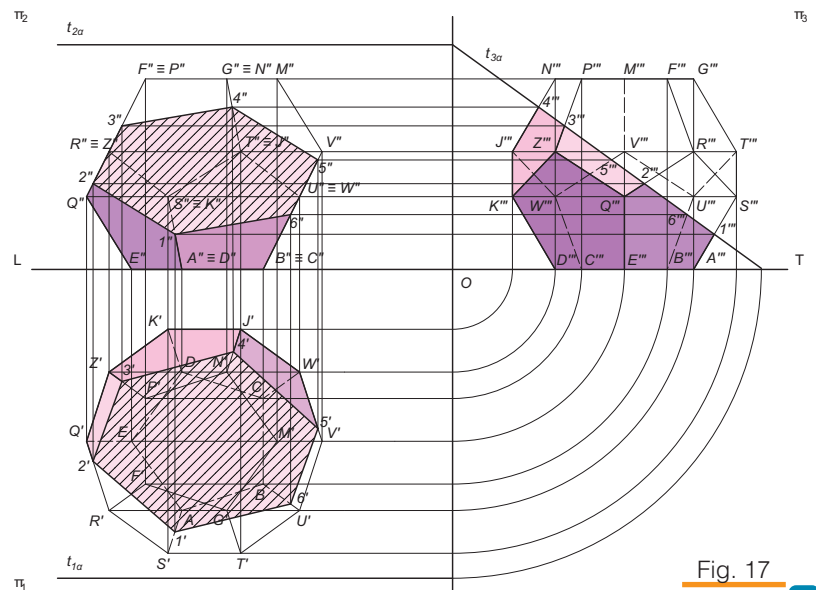


Fig. 17

Problema 4

Determinare la sezione di un prisma retto con asse $\perp \pi_1$ e base pentagonale giacente su π_1 , ottenuta con un piano $\alpha \perp \pi_2 \angle \beta^\circ \pi_1$ come indicato in figura. Siano l il lato di base e h l'altezza del poliedro (► Fig. 18).

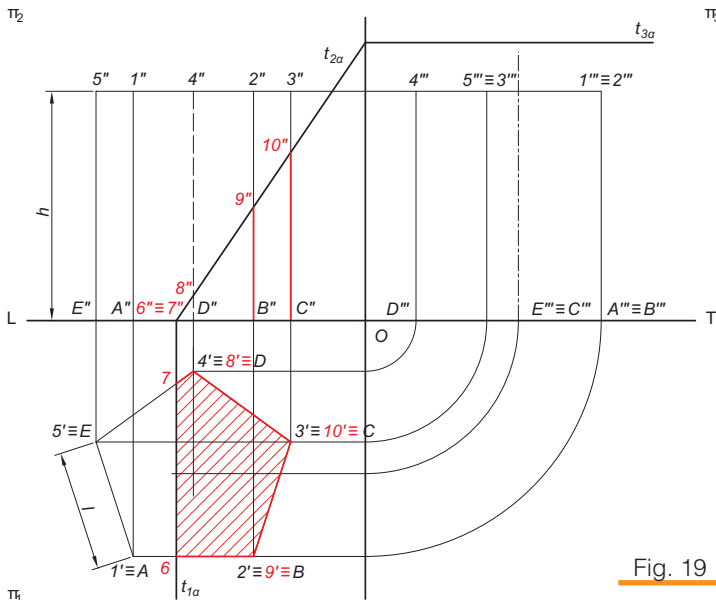


Fig. 19

■ La rappresentazione del prisma sezionato viene completata con la terza vista. Si proiettano così da π_2 le immagini dei punti intersezione $8''$, $9''$ e $10''$ individuando in π_3 , sugli spigoli corrispondenti, alcuni dei vertici della superficie di sezione. Da π_1 si proietta 7 mentre la proiezione del punto 6 coincide con quella di A e B. Si ottiene così un poligono irregolare a cinque lati che viene campito. Si evidenzia con segno 01.2 la porzione di spigolo $D'''8'''$ che resta in vista e si differenzia con segno 02.1 la parte di spigolo non in vista $C'''10'''$ (► Fig. 20).

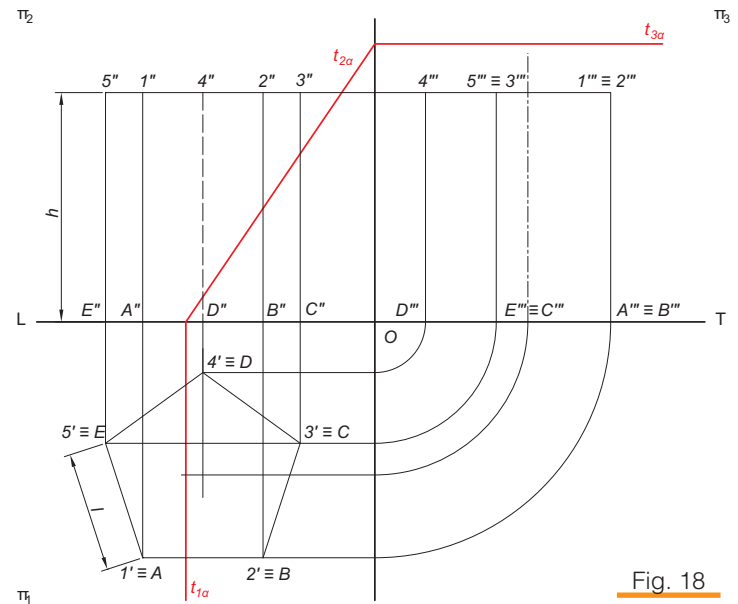


Fig. 18

■ Il piano α è proiettante in seconda posizione perciò, in π_2 , i punti di intersezione del piano con gli spigoli del solido si determinano individuando: $8''$ su $4''D''$, $9''$ su $2''B''$ e $10''$ su $3''C''$. Il piano α interseca la base del prisma e in π_1 è possibile individuare i punti di intersezione 6 sul lato AB e 7 su DE; le loro proiezioni in π_2 coincidono sulla LT. Nella porzione di solido che resta visibile in π_2 si distinguono i tratti di spigolo $C'''10'''$ e $B'''9'''$. Su π_1 la superficie di sezione da campire coincide con la proiezione della porzione di prisma rimanente (► Fig. 19).

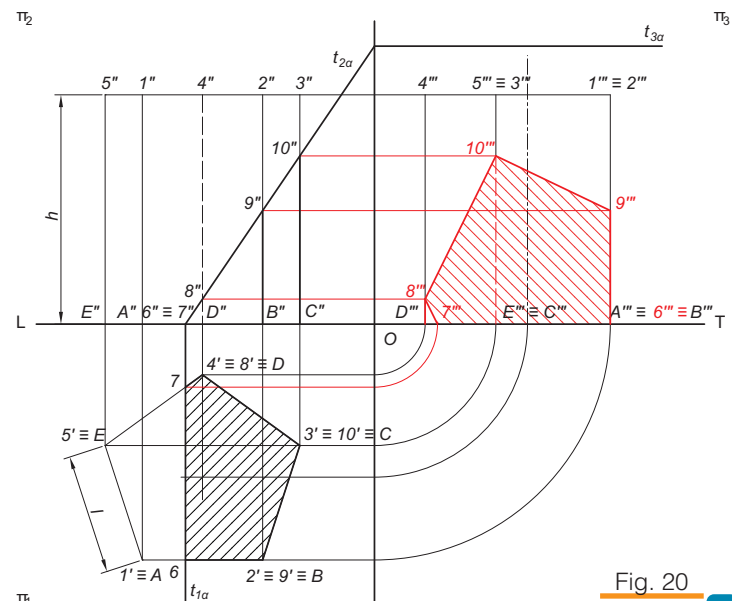


Fig. 20

Problema 5

Determinare la sezione di un prisma retto, avente la base esagonale giacente su π_1 , ottenuta mediante un piano generico, che interseca la base del solido, con le tracce $t_{1\alpha} \angle 30^\circ$ LT e $t_{2\alpha} \angle 45^\circ$ LT (metodo del piano ausiliario).

- Si esegue la proiezione preparatoria rappresentando il prisma su π_1 e su π_2 e il piano α individuato dalle sue tracce $t_{1\alpha} \angle 30^\circ$ LT, $t_{2\alpha} \angle 45^\circ$ LT con la $t_{1\alpha}$ che taglia la base del poliedro (► Fig. 21).

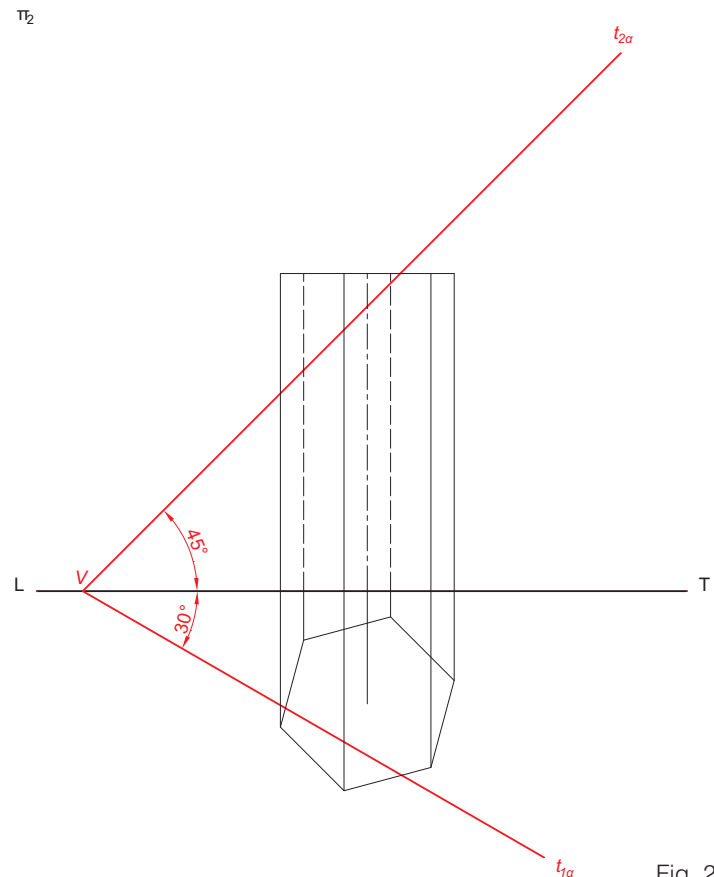


Fig. 21

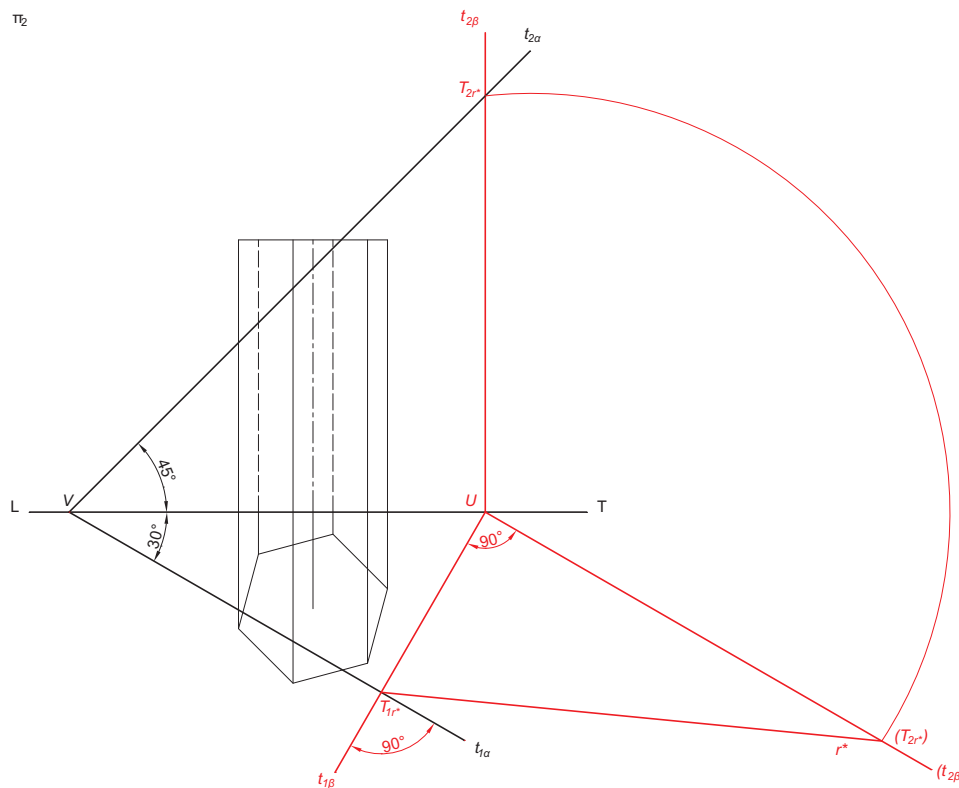


Fig. 22

- Per determinare la sezione si adotta il **metodo del piano ausiliario**.

Si individua un piano β primo proiettante in modo che $t_{1\beta} \perp t_{1\alpha}$; riportando la $(t_{2\beta}) \perp t_{1\beta}$ si rappresenta il piano β ribaltato su π_1 . Le intersezioni delle tracce omonime dei piani α e β determinano le tracce T_{1r^*} e T_{2r^*} della retta di massima pendenza, cioè della retta intersezione tra gli stessi piani α e β . La rappresentazione della r^* , su (β) , si esegue congiungendo le sue tracce (T_{2r^*}) e T_{1r^*} (► Fig. 22).

■ Essendo $\alpha \perp \beta$ la r^* rappresenta, su (β) , la proiezione del piano di sezione α sul piano ausiliario β . Ora, assumendo β come quarto quadro e proiettandovi il prisma, il problema viene ricondotto a quelli precedenti delle sezioni di poliedri ottenute con piani perpendicolari a un quadro. Per visualizzare i punti di intersezione della r^* con l'immagine del prisma è necessario ribaltare quest'ultima su π_1 . Trovata l'immagine ribaltata del solido su (β) si rileva che il piano di sezione α , rappresentato dalla r^* , non interseca la base superiore del prisma; perciò su π_1 la sezione del solido coincide con la proiezione della porzione di prisma rimanente, la cui immagine risulta data dal poligono di base tagliato dalla $t_{1\alpha}$. I vertici della superficie di sezione sono: $1'$ e $6'$ individuati sulla $t_{1\alpha}$ dall'intersezione con gli spigoli di base e $2', 3', 4'$ e $5'$ determinati sugli spigoli laterali. Congiungendoli in sequenza, si trova la superficie di sezione che viene evidenziata con l'apposita campitura (► Fig. 23).

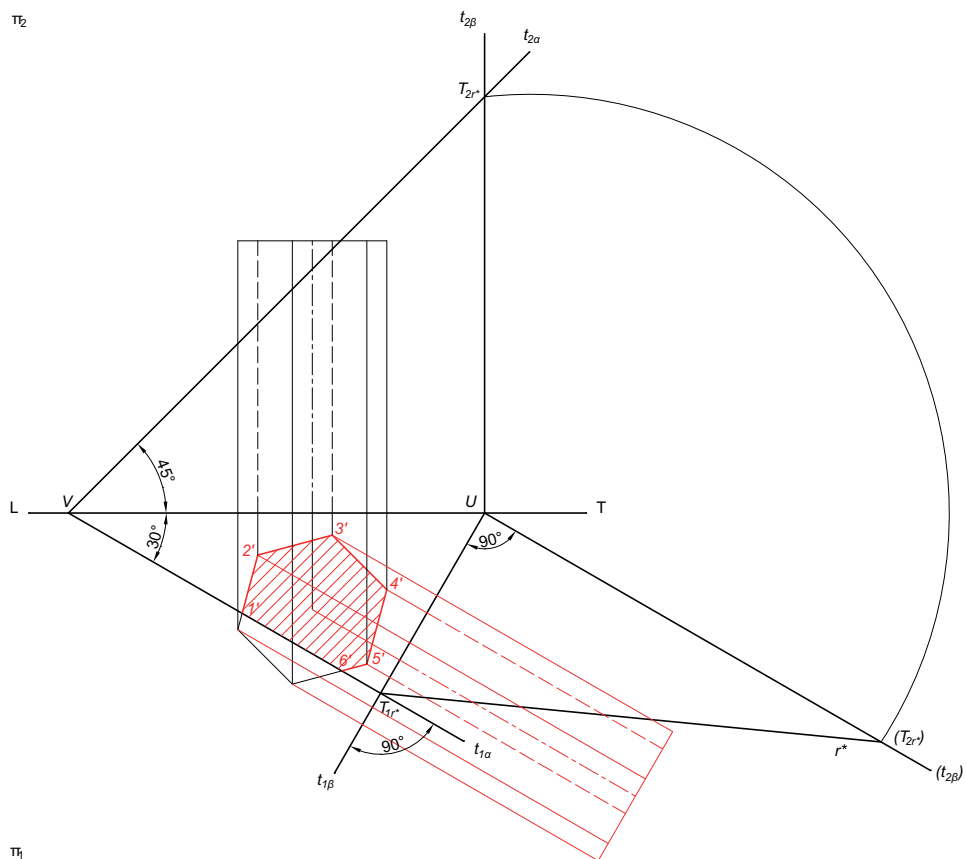
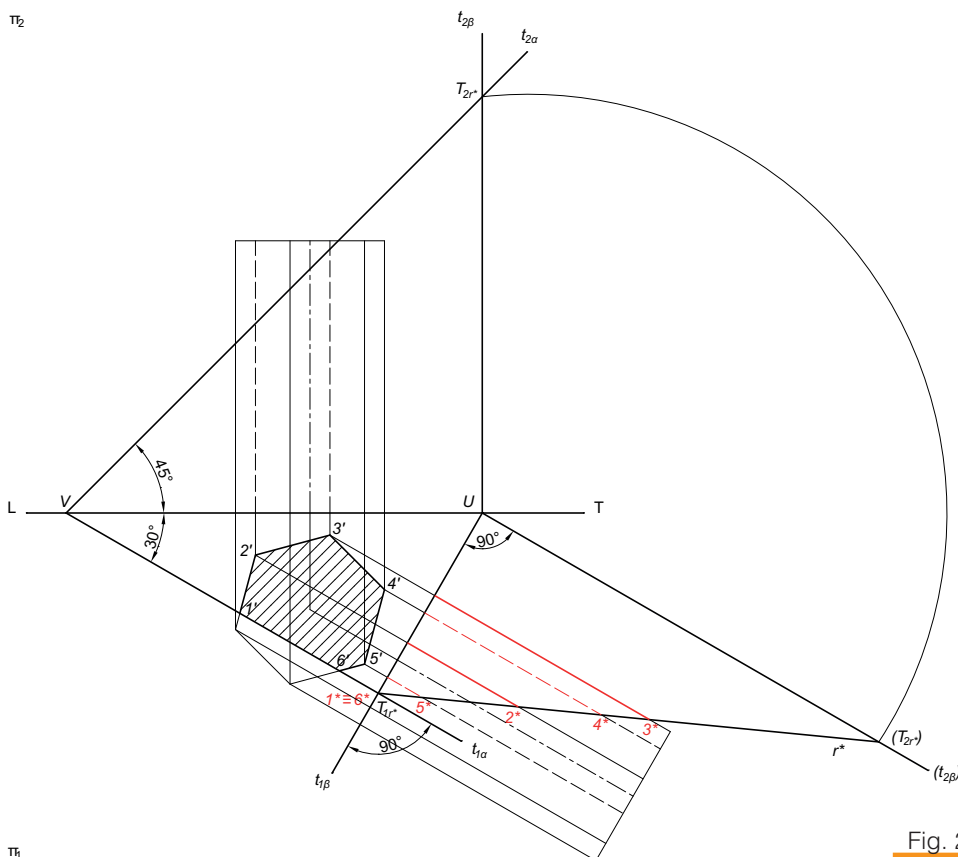


Fig. 23



■ Su (β) è possibile individuare i punti 2^* , 3^* , 4^* e 5^* intersezioni della r^* (quindi di α) con gli spigoli del prisma e 1^* con 6^* intersezione di α con la base del solido (► Fig. 24).

Fig. 24

■ Per determinare la seconda immagine della superficie di sezione occorre raddrizzare su π_2 i punti 2^* , 3^* , 4^* e 5^* . Per compiere ciò prima si proiettano i punti sulla ($t_{2\beta}$), quindi si raddrizzano sulla $t_{2\alpha}$ e infine si proiettano fino a ricollocarli sugli spigoli corrispondenti. Così, per esempio, raddrizzando 2^* si determina in π_2 il punto $2''$ collocato sullo spigolo corrispondente, in π_1 , a $2'$. Applicando la procedura ai rimanenti punti si ottengono gli altri vertici della superficie di sezione. I punti 1^* e 6^* , giacenti su π_1 , non possono essere raddrizzati come gli altri punti: così le immagini $1''$ e $6''$ sono determinate dalla proiezione, sulla LT, di $1'$ e $6'$. Si completa la rappresentazione congiungendo i punti trovati ed evidenziando la superficie di sezione con la specifica campitura; si ingrossano, con segno 01.2, le porzioni di spigolo che rimangono visibili (► Fig. 25).

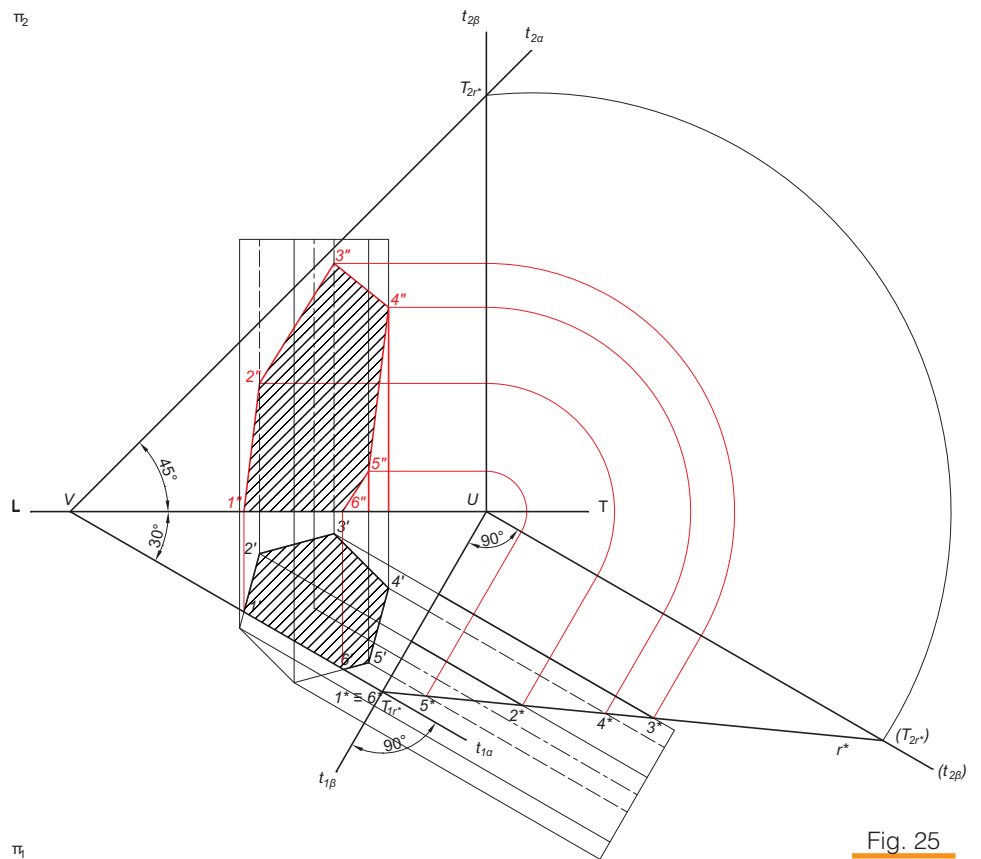


Fig. 25

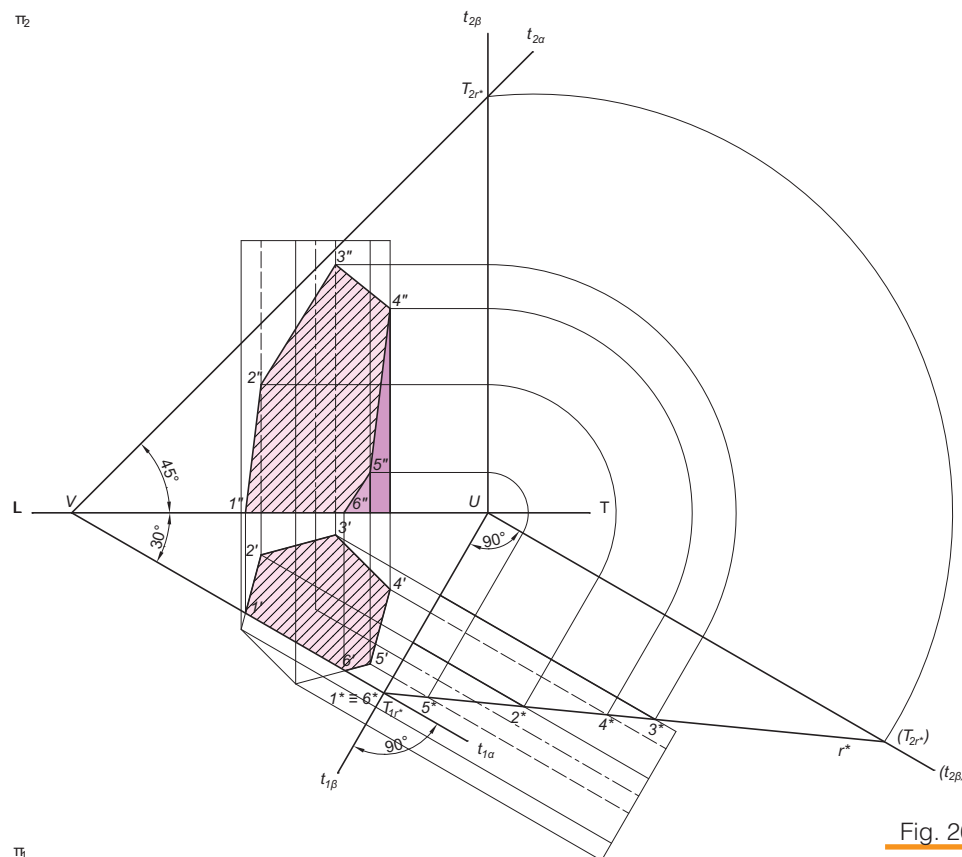


Fig. 26

■ L'applicazione di una campitura solida – in tonalità dello stesso colore – rende più chiara la rappresentazione (► Fig. 26).

Problema 6

Determinare le proiezioni ortogonali della sezione di un cono circolare retto con asse $\perp \pi_1$, ottenuta con un piano $\alpha \parallel \pi_3$ secante il raggio a $2/3R$ dal bordo. Siano R il raggio di base e h l'altezza del cono.

- Si rappresenta il cono sui tre quadri inserendo le tracce $t_{1\alpha}$ e $t_{2\alpha}$ del piano di sezione; la $t_{3\alpha}$ in questo caso risulta impropria. Il piano di sezione α , parallelo all'asse del cono, genera un ramo dell'iperbole (► Fig. 27).

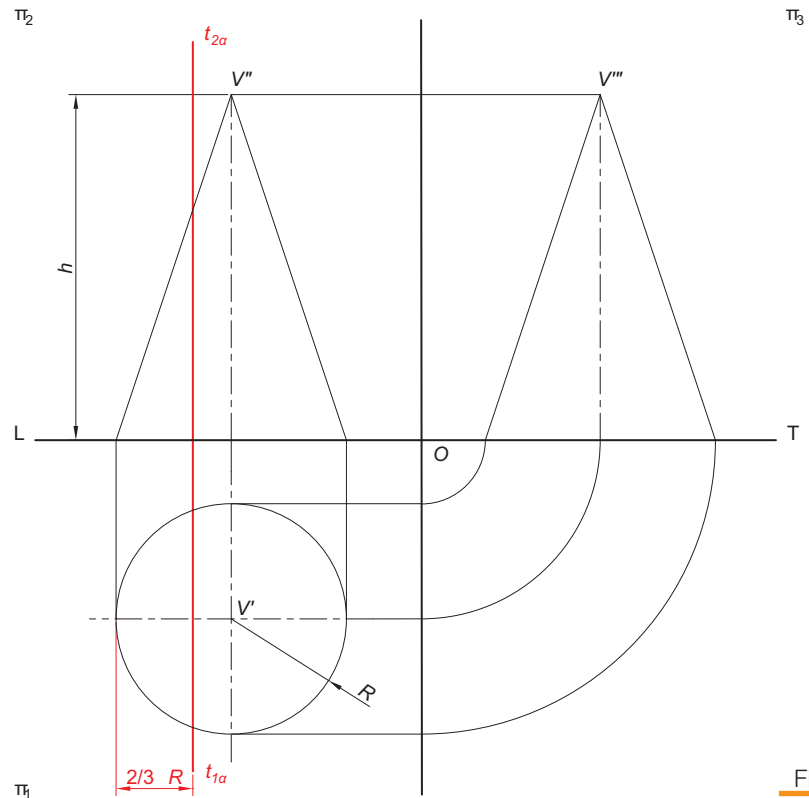


Fig. 27

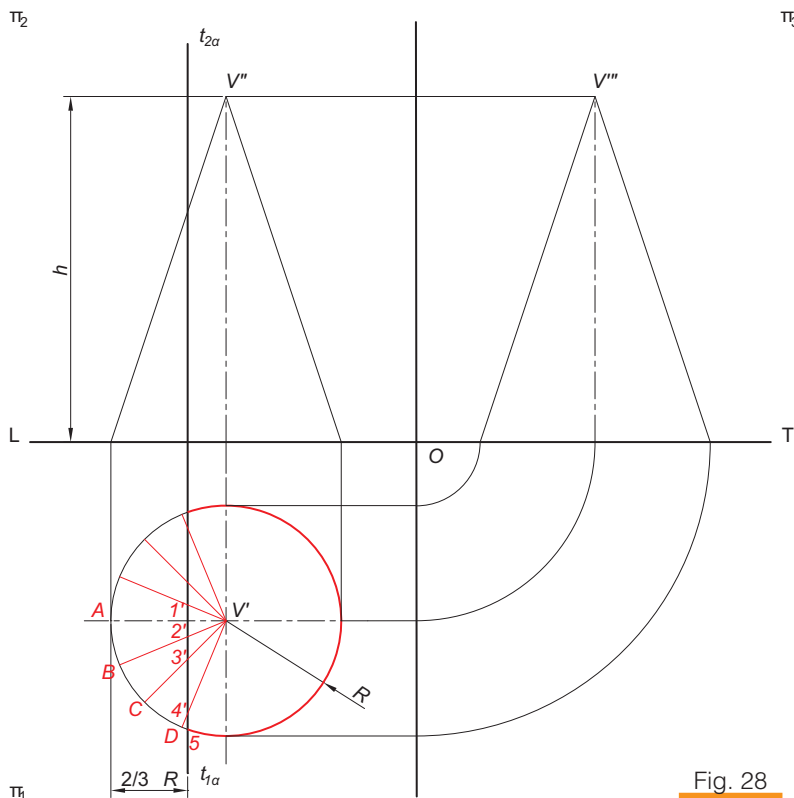


Fig. 28

- Su π_1 si fissano le immagini delle generatrici AV' , BV' , CV' , DV' e le simmetriche rispetto all'asse parallelo a π_2 tracciandole dal vertice alla base del cono. Si individua il punto 5 intersezione della $t_{1\alpha}$ con la circonferenza di base. Poiché il piano di sezione α è primo proiettante, l'intersezione della $t_{1\alpha}$ con le immagini AV' , BV' , CV' , DV' delle generatrici, individua i punti 1', 2', 3' e 4' per i quali, considerando anche 5, passa la semi-iperbole. Si evidenzia, con segno 01.2, la porzione della base che resta visibile dopo aver eseguito il taglio (► Fig. 28).

- Per rappresentare la seconda immagine (che risulta di profilo) della superficie di sezione si proiettano, su π_2 , le immagini AV' , BV' , CV' , DV' delle generatrici e il punto 5. Siccome il piano di sezione α è proiettante anche in seconda posizione, l'intersezione della $t_{2\alpha}$ con le immagini seconde $A''V''$, $B''V''$, $C''V''$ e $D''V''$ delle generatrici individua i punti corrispondenti $1''$, $2''$, $3''$ e $4''$. Si completa la rappresentazione su π_2 evidenziando, con segno 01.2, la porzione di cono che resta visibile, eliminata la parte eccedente (► Fig. 29).

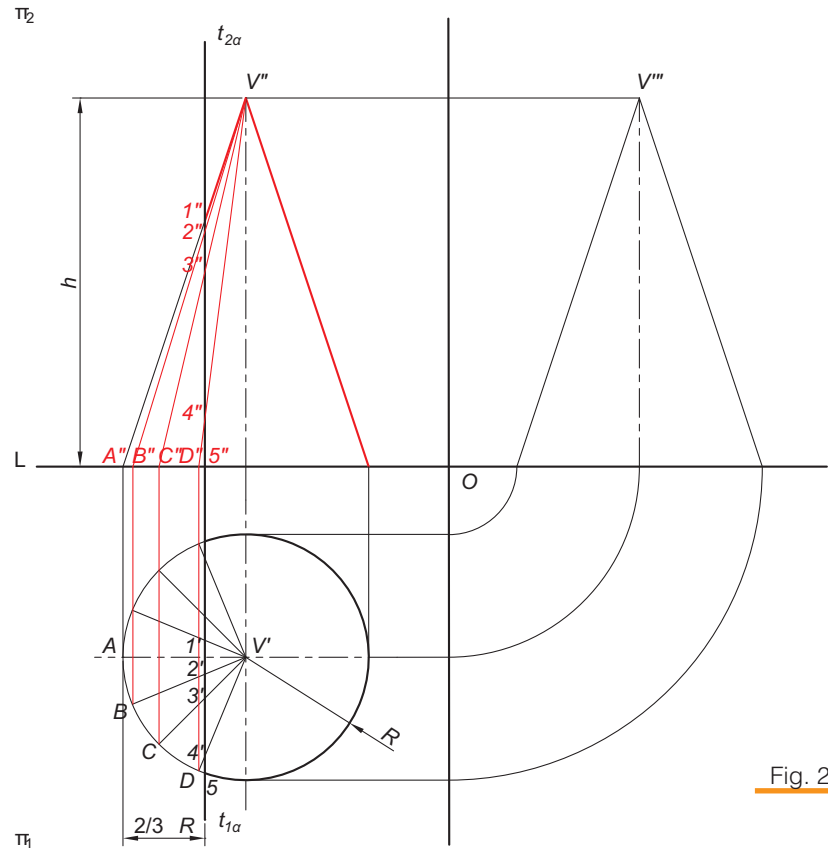


Fig. 29

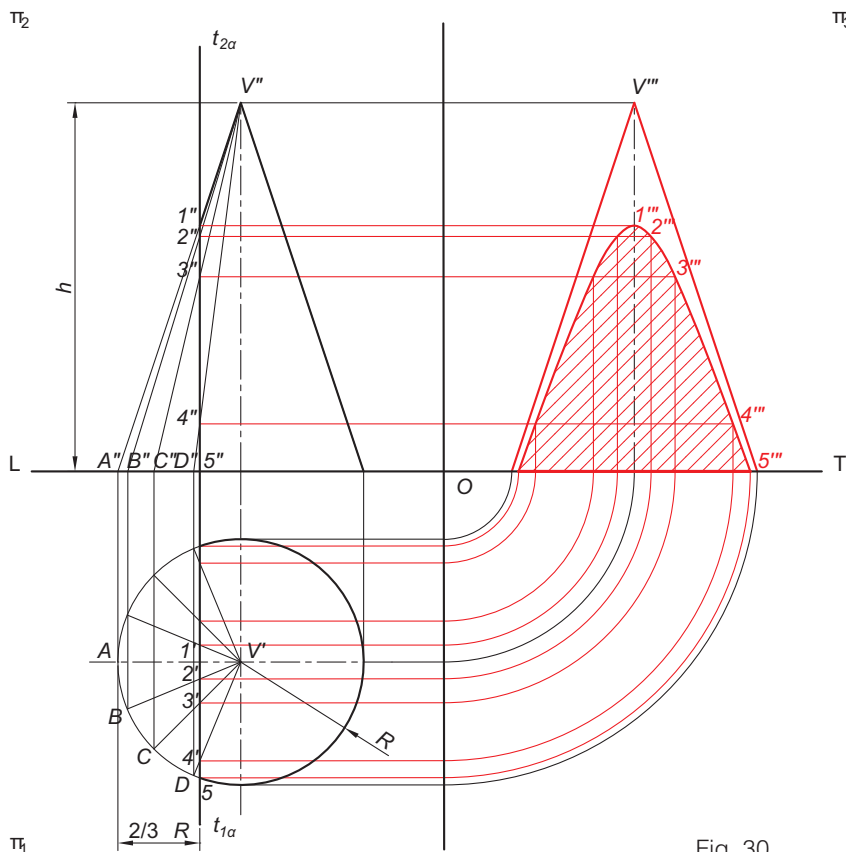


Fig. 30

- Il parallelismo del piano di sezione α con π_3 produce sul terzo quadro la rappresentazione dell'iperbole con dimensioni reali. Per determinarla si proiettano, su π_3 , da π_1 i punti $1'$, $2'$, $3'$ e $4'$ e da π_2 i punti $1''$, $2''$, $3''$ e $4''$. Nelle intersezioni delle omonime proiezioni si determinano le immagini terze dei punti $1'''$, $2'''$, $3'''$ e $4'''$ che, uniti in sequenza, con un curvilineo, permettono di trovare la semi-iperbole la quale, riportata simmetricamente rispetto all'asse verticale del cono, consente di determinare la terza vista della sezione conica. A completamento della rappresentazione si evidenzia la sezione con la specifica campitura e si ingrossano, con segno 01.2, le due generatrici a margine del cono (► Fig. 30).

Problema 7

Determinare la vera forma della sezione di un parallelepipedo, inclinato ai tre quadri e appoggiato su π_1 con lo spigolo minore della base, ottenuta con un piano $\alpha \perp \pi_3 \angle \pi_1$ ($\alpha \parallel LT$).

■ Ricordiamo il risultato ottenuto sezionando il solido con il piano assegnato (► Fig. 31).

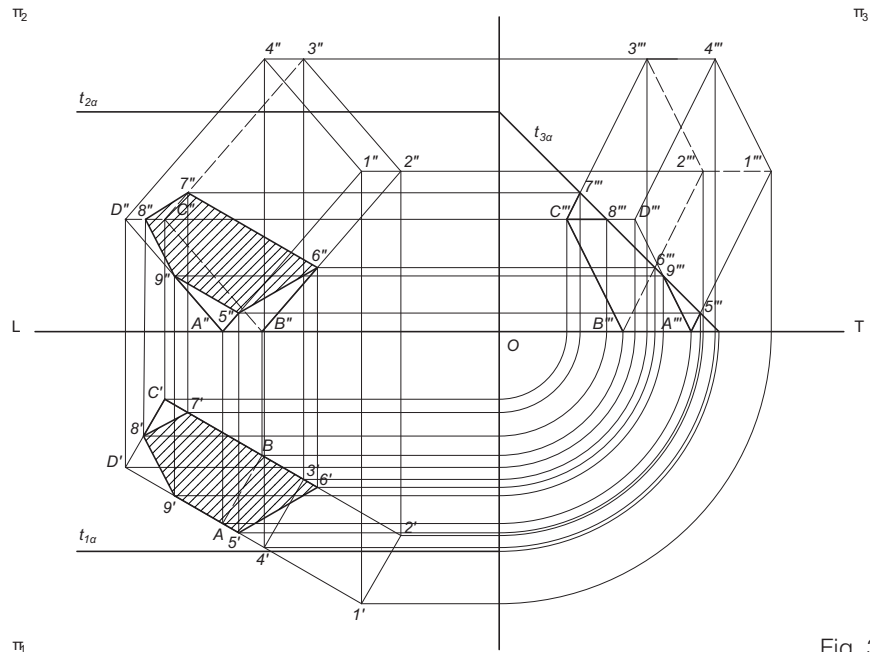
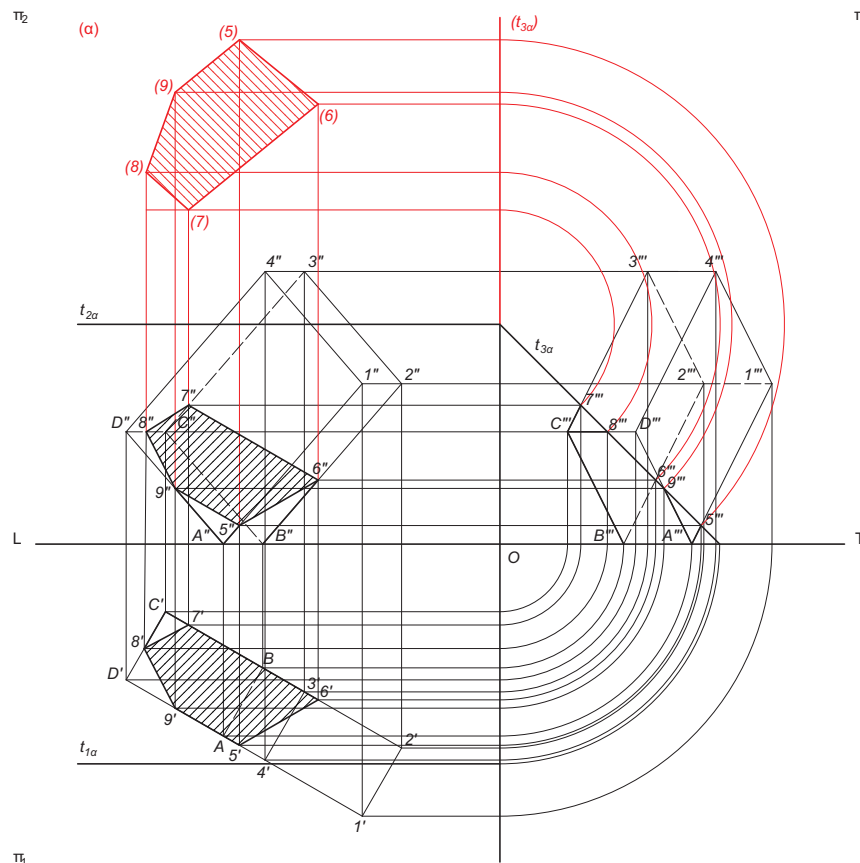


Fig. 31



■ Per determinare la vera forma della sezione del parallelepipedo si sceglie di ribaltare il piano di sezione α su π_2 utilizzando come asse di rotazione la sua traccia $t_{2\alpha}$. Trovata la $(t_{3\alpha})$, ortogonale alla $t_{2\alpha}$ (coincidente con la retta di intersezione dei quadri π_2 e π_3), si ribaltano su essa i punti $5'''$, $6'''$, $7'''$, $8'''$ e $9'''$ (immagini terze dei vertici della superficie di sezione ottenuti dall'intersezione del piano α con gli spigoli del parallelepipedo) e si portano le perpendicolari alla traccia $(t_{3\alpha})$ nei punti ribaltati. Ora si proiettano, perpendicolarmente alla $t_{2\alpha}$ da π_2 su (α) , i punti $5''$, $6''$, $7''$, $8''$ e $9''$. Si trova così un poligono i cui vertici (5), (6), (7), (8) e (9) sono individuati dalle intersezioni delle proiettanti portate dai corrispondenti punti omonimi, vertici della superficie di sezione. Questo poligono rappresenta la vera forma della sezione la cui superficie viene evidenziata con l'apposita campitura (► Fig. 32).

Fig. 32

Problema 8

Determinare la vera forma della sezione di un prisma retto, avente la base esagonale giacente su π_1 , ottenuta con un piano α generico.

- Ricordiamo il risultato della sezione del prisma esagonale ottenuto con il piano α generico (► Fig. 33).

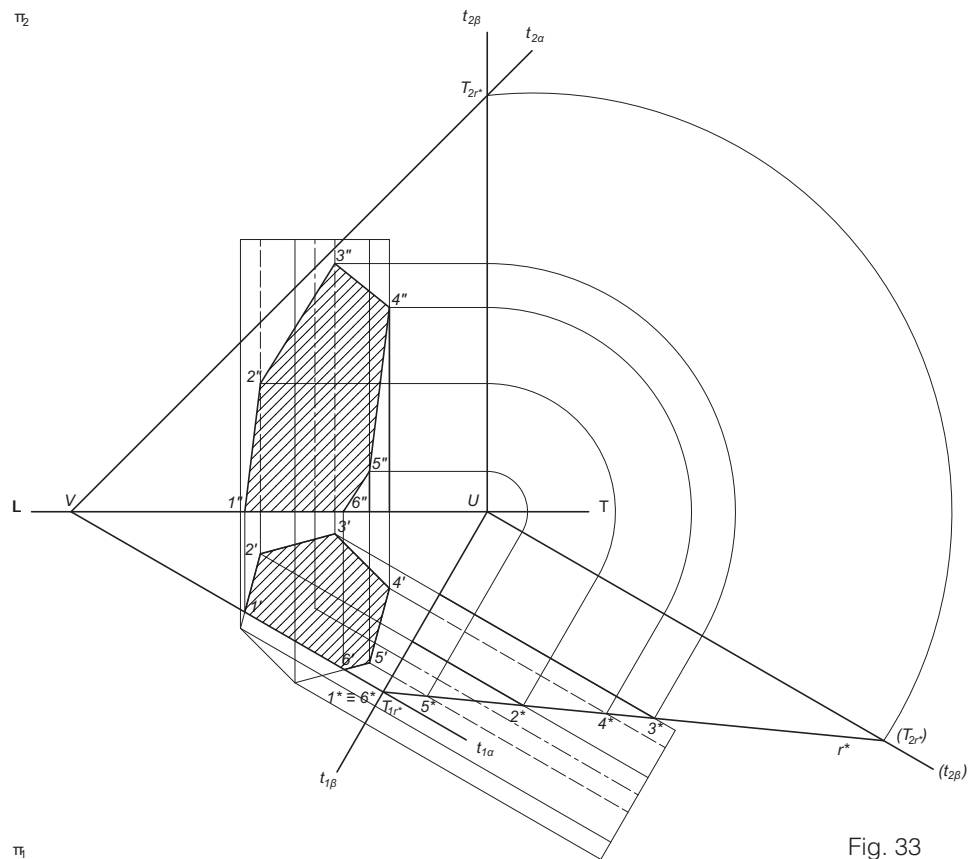


Fig. 33

- Per procedere si decide di ribaltare il piano di sezione α su π_2 utilizzando, come asse di rotazione, la sua traccia t_{2a} . Per eseguire il ribaltamento del piano α si fissa un piano ausiliario γ secondo proiettante che abbia la traccia $t_{2\gamma}$ ortogonale alla traccia t_{2a} del piano di sezione. Si ribalta il punto A, intersezione delle tracce t_{1a} e $t_{1\gamma}$, su $t_{2\gamma}$ trovando (A) punto per il quale passa la (t_{1a}) . La direzione di (t_{1a}) è individuata dal segmento $V(A)$ (► Fig. 34).

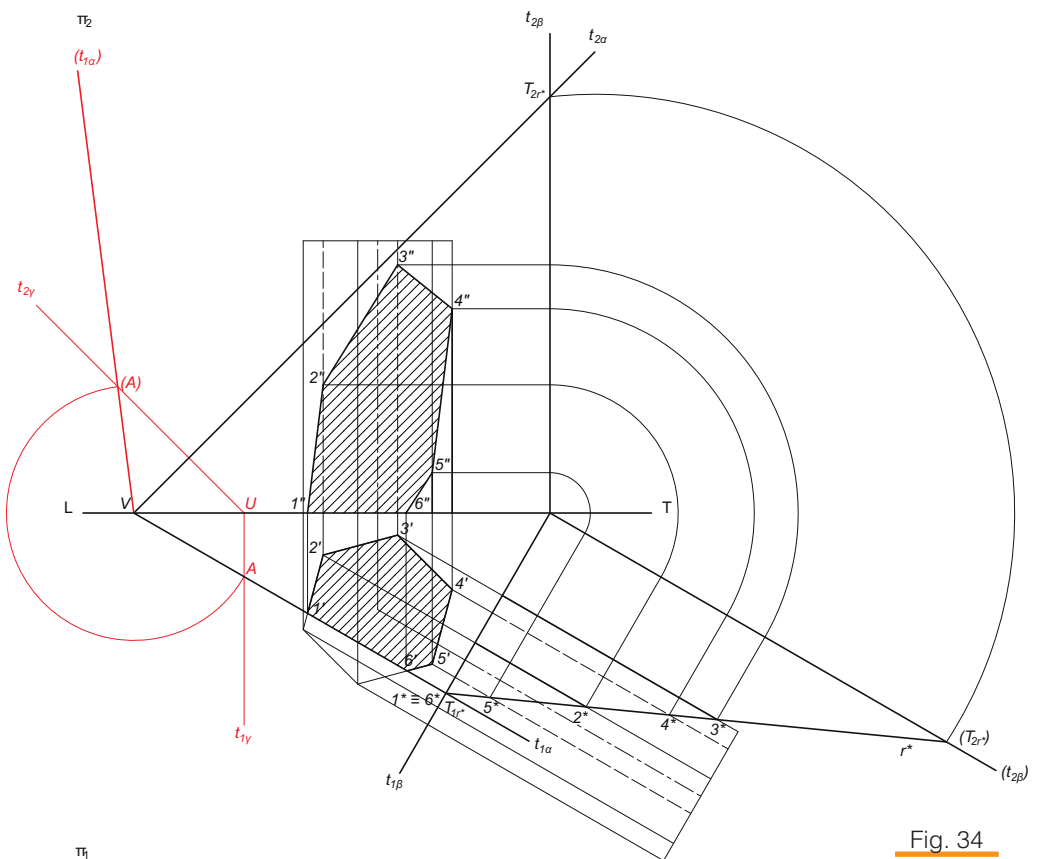


Fig. 34

■ Determinata la $(t_{1\alpha})$, si proiettano sulla $t_{1\alpha}$, parallelamente alla LT, i punti $2'$, $3'$, $4'$ e $5'$: da notare che i punti $1'$ e $6'$ appartengono alla $t_{1\alpha}$, perciò non devono essere proiettati. Quindi si ribaltano sulla $(t_{1\alpha})$ le proiezioni appena determinate e poi si portano le parallele alla traccia $t_{2\alpha}$ nei punti ribaltati. Ora si proiettano, perpendicolarmente alla $t_{2\alpha}$, i punti $2''$, $3''$, $4''$ e $5''$ (vertici dell'immagine seconda del poligono generato dal taglio operato con il piano α). Le immagini $1''$ e $6''$, giacciono su π_1 e pertanto, non occorre proiettarle: difatti i punti reali (1) e (6) , collocati sulla $(t_{1\alpha})$, sono direttamente determinati con il semplice ribaltamento, sulla $(t_{1\alpha})$, di $1'$ e $6'$. Si ottengono così i punti (2) , (3) , (4) e (5) individuati dalle intersezioni delle proiettanti portate dalle immagini dei punti omonimi determinate su π_1 e su π_2 . Congiungendo in sequenza i punti trovati, si ottiene un poligono irregolare con sei lati che rappresenta la vera forma della sezione del prisma. La superficie viene evidenziata con la specifica campitura (► Fig. 35).

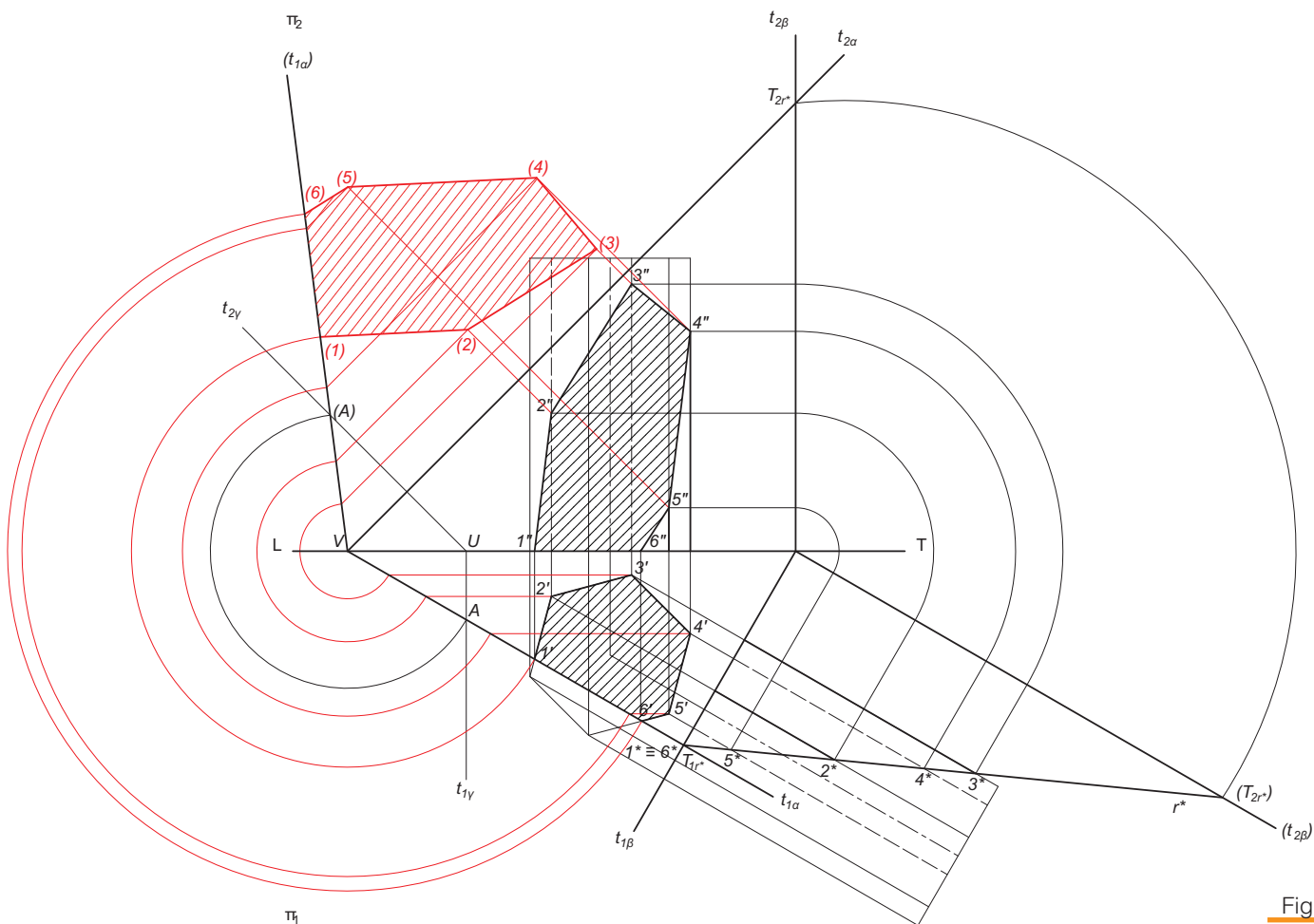


Fig. 35

Nei problemi fino a ora svolti è stata affrontata la ricerca della vera forma della sezione; come elementi di partenza sono stati assunti: le rappresentazioni descrittive del solido sezionato e il piano mediante il quale è stato eseguito il taglio.

Analizziamo ora il modo di procedere nel percorso inverso cioè, partendo dalle rappresentazioni del solido da sezionare e della vera forma generata della sezione, come si possa determinare il piano che consente di ottenere quella specifica sezione.

Problema 9

Determinare un piano α che, tagliando un cubo giacente con una faccia su π_1 , generi quale superficie di sezione un esagono regolare di lato l .

Dall'analisi dei dati forniti nel testo del problema si osserva che:

- il cubo è composto da sei facce uguali (quadrati) e la figura ottenuta dalla sezione ha sei lati uguali. Ciò implica che il piano che genera il poligono esagonale deve intersecare tutte le facce del cubo;
- l'esagono è regolare perciò rispetta tutte le condizioni di simmetria (assiale e centrale): pertanto il piano di sezione α non può che passare per il centro del cubo.

Al fine di operare con un numero limitato di variabili, si sceglie di eseguire la sezione del cubo con un piano proiettante. Questa decisione consente di circoscrivere la soluzione del problema alla determinazione di due incognite: la disposizione del cubo rispetto a π_2 e a π_3 e l'inclinazione del piano rispetto a un quadro.

Considerato che il cubo giace con una faccia su π_1 , si escludono i seguenti piani proiettanti (paralleli a un quadro e perpendicolari a π_1 in quanto tagliano il cubo solo su quattro facce) uscenti dalla LT poiché l'operatività risulta limitata esclusivamente al terzo quadro, il meno agevole.

Rimangono da considerare i piani proiettanti ortogonali ai quadri π_2 e π_3 ; tra le due possibilità si opta per un piano di sezione proiettante in seconda posizione ($\perp \pi_2$) che, come già detto, passi per il centro del cubo.

Ora si deve stabilire la collocazione del cubo rispetto a π_2 e a π_3 . Di sicuro il cubo non può essere disposto con spigoli perpendicolari a π_2 , cioè paralleli alla traccia $t_{1\alpha}$ del piano di sezione α : difatti il piano stesso taglierebbe il cubo così collocato solo su quattro facce.

Il cubo risulta vincolato a π_1 (base giacente sul primo quadro): di conseguenza può variare la sua posizione solo ruotando intorno al suo asse verticale.

È stato appurato che il piano di sezione α deve intersecare tutte e sei le facce del cubo (basi comprese) e che la forma della superficie di sezione deve risultare quella di un poligono regolare. Pertanto, per quanto precede, l'unica posizione del cubo che, tagliato con un piano secondo proiettante, generi una sezione rispondente alla simmetria del poligono regolare è quella che presenta una diagonale di base ortogonale a π_2 e l'altra ortogonale alla traccia $t_{1\alpha}$.

- Assumendo quale asse di rotazione la traccia $t_{1\alpha}$, si ribalta su π_1 il piano di sezione α (secondo proiettante): così si può rappresentare, su (α) coincidente con π_1 , la vera forma della sezione del cubo (esagono regolare di lato l) che non viene campito per evitare sovrapposizioni nelle rappresentazioni successive. Con il ribaltamento, la traccia $(t_{2\alpha})$ coincide con la LT (► Fig. 36).

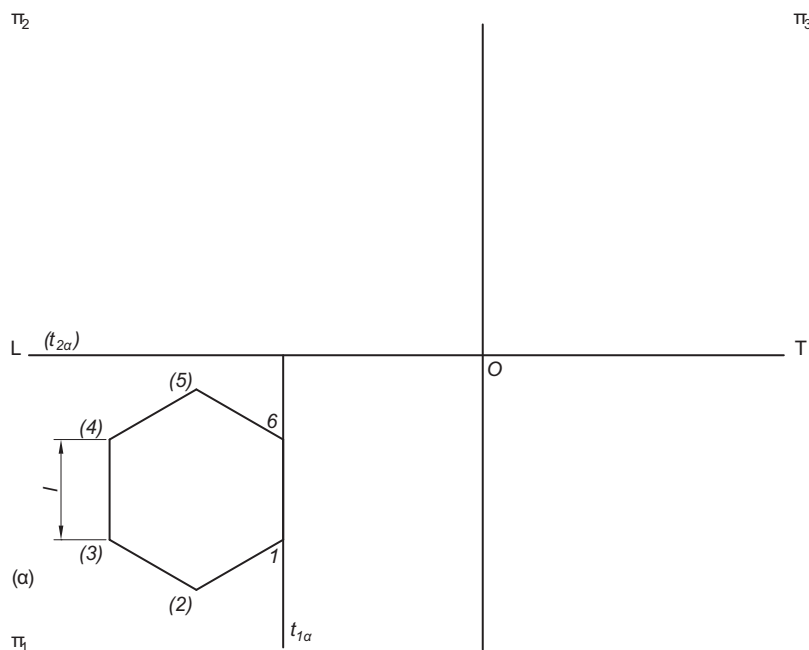


Fig. 36

■ La diagonale (2)/(5) della vera forma della sezione è uguale alla diagonale della base del cubo. Si traccia l'asse dell'esagono sul cui prolungamento si trova la diagonale della base del cubo. Il lato 16 è individuato dall'intersezione della $t_{1\alpha}$ con due spigoli consecutivi della base del cubo; per determinarli si tracciano due linee: una per 1 e l'altra per 6 inclinate di 45° all'asse. I segmenti individuati tra l'asse e le proiezioni dei vertici (2) e (5) sono gli spigoli cercati (► Fig. 37).

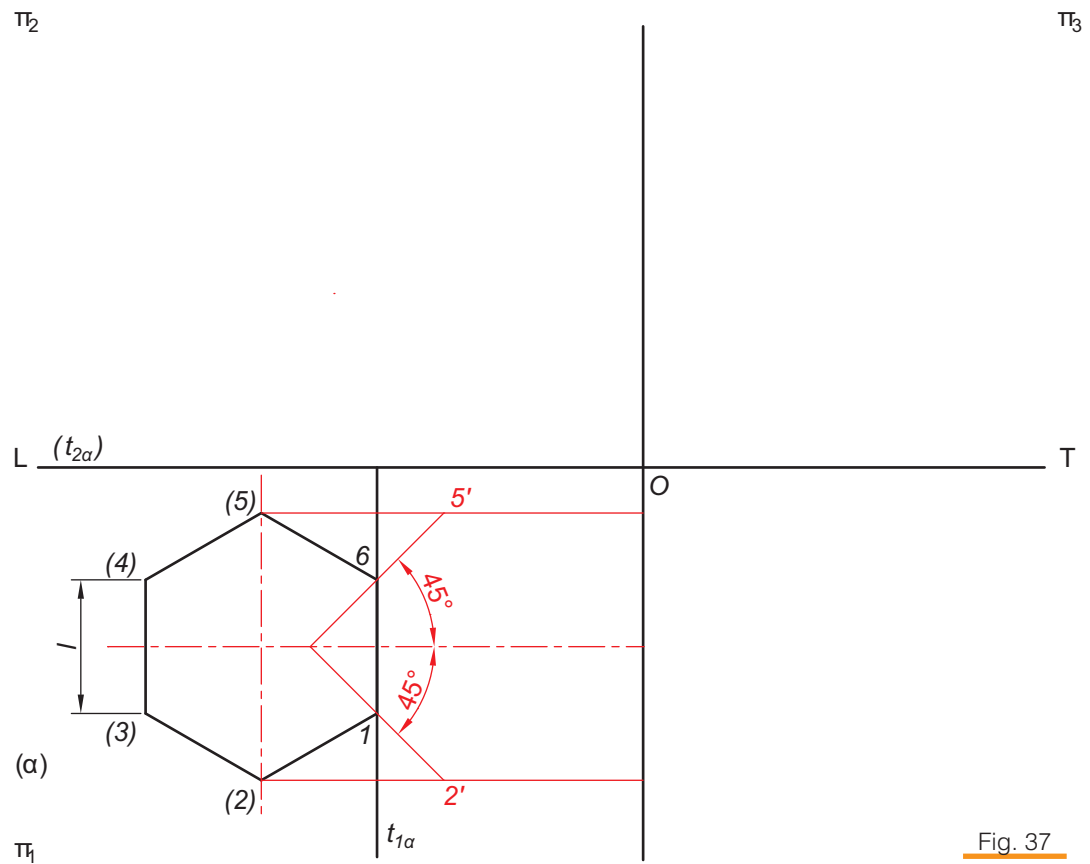
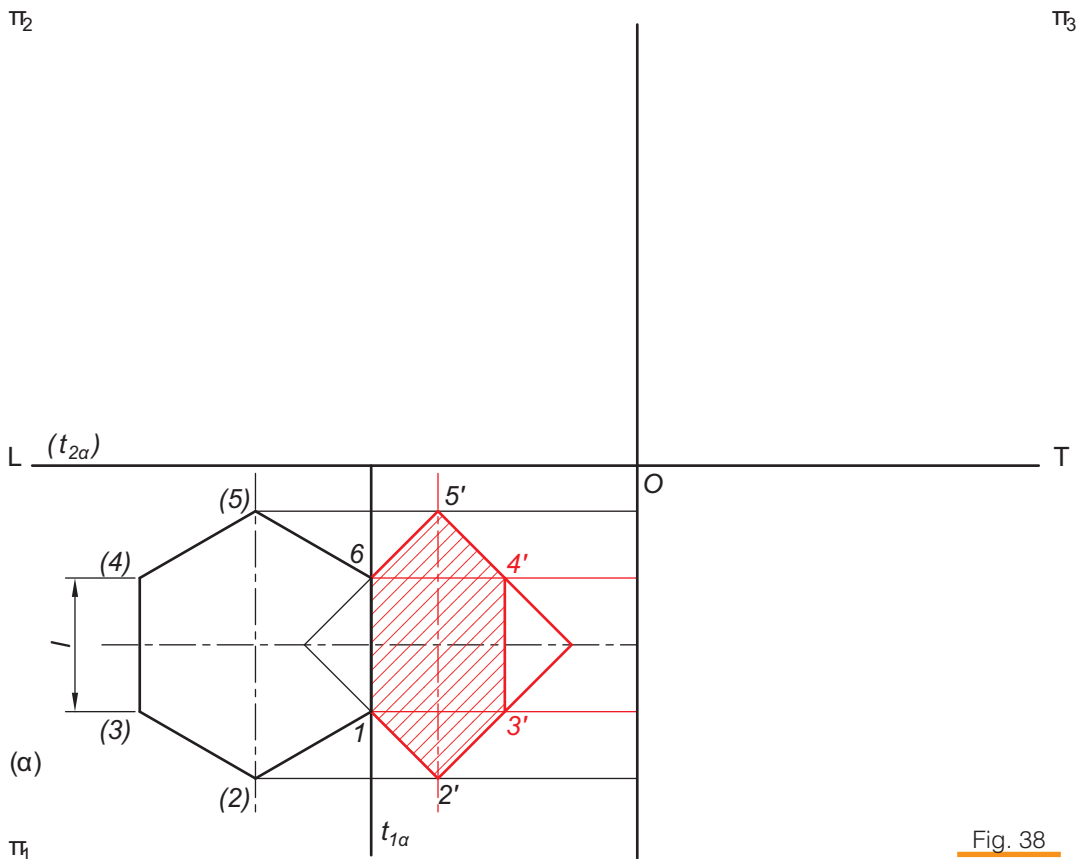


Fig. 37



■ Per simmetria, rispetto alla diagonale ortogonale a π_2 , si completa l'immagine del cubo. Ora si raddrizza, su π_1 , la vera forma della sezione individuando i punti 2', 3', 4' e 5' sugli spigoli dell'immagine del cubo. I punti 1 e 6 sono l'intersezione del piano α con gli spigoli della base inferiore, allo stesso modo i punti 3' e 4' lo sono con quelli della base superiore. Congiungendo in sequenza i punti trovati si determina la prima immagine della sezione, la cui superficie viene evidenziata con la specifica campitura (► Fig. 38).

Fig. 38

- Per determinare l'inclinazione della $t_{2\alpha}$ si proietta il cubo su π_2 e si individua il suo centro per il quale, come spiegato in precedenza, passa il piano di sezione. Perciò la $t_{2\alpha}$ è coincidente con la direzione individuata dall'intersezione della $t_{1\alpha}$ con la LT e il centro del cubo. L'intersezione della $t_{2\alpha}$ con gli spigoli del cubo individua i vertici della superficie di sezione $1'' \equiv 6''$, $2'' \equiv 5''$ e $3'' \equiv 4''$ (► Fig. 39).

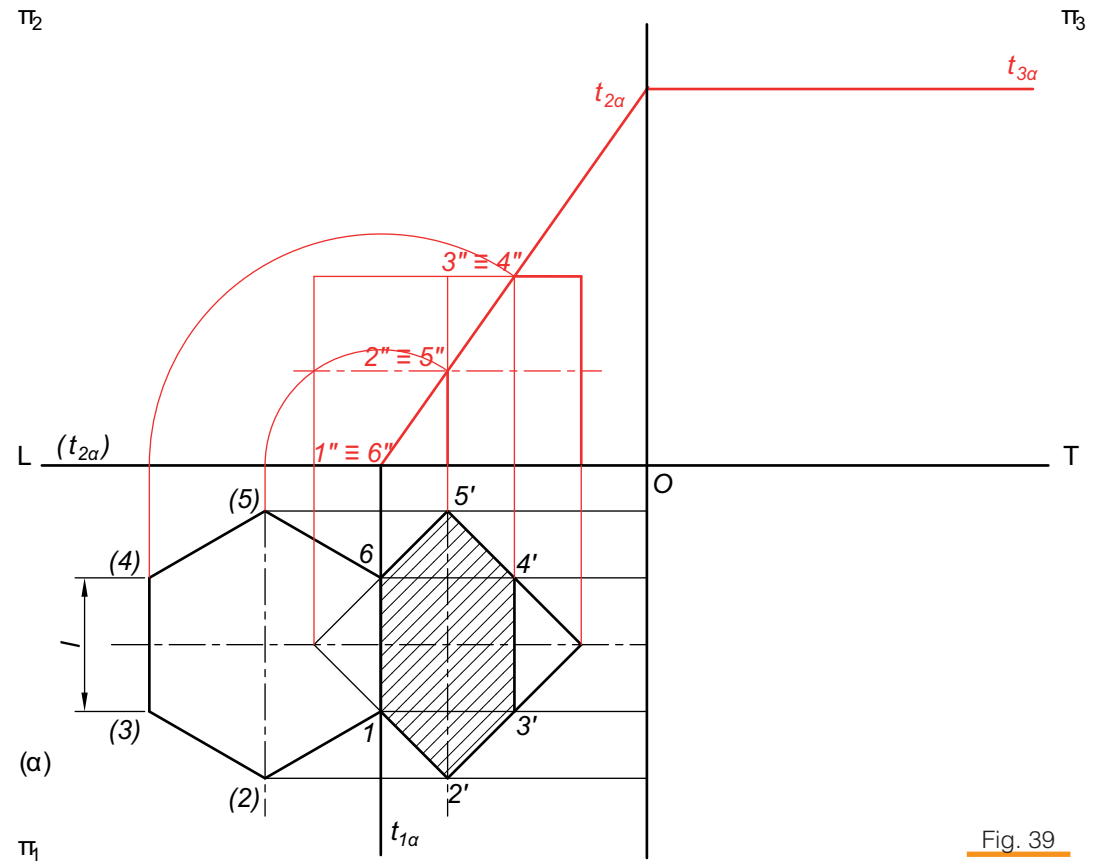
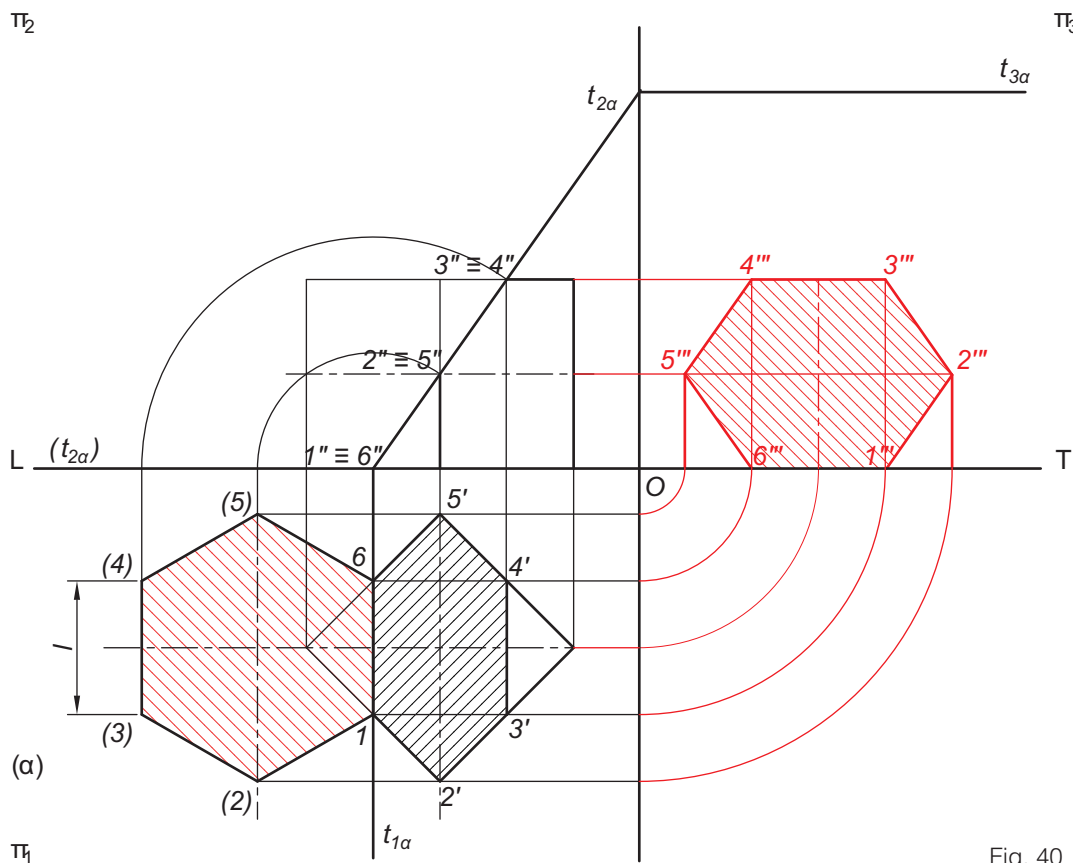


Fig. 39



- Si completa la rappresentazione mediante la determinazione della terza vista che si ottiene proiettando i vertici della superficie di sezione dai quadri precedenti. Per concludere si evidenziano le superfici di sezione, reale e terza immagine, con la convenzionale campitura (► Fig. 40).

Fig. 40

Problema 10

Determinare lo sviluppo del prisma sezionato.

■ Riprendiamo il risultato dalla ricerca della vera forma della sezione di un prisma retto, avente la base esagonale giacente su π_1 , ottenuta con un piano α generico secante la base inferiore del prisma (► Fig. 41).

Il prisma retto, collocato con la base giacente su π_1 , presenta tutti gli spigoli laterali paralleli a π_2 : perciò, su questo quadro, è possibile rilevare le misure reali delle porzioni degli spigoli restanti dopo aver eseguito il taglio con il piano generico α . La vera forma della base inferiore si ottiene dalla sua immagine su π_1 (la base infatti coincide con il primo quadro). Infine, la vera forma della sezione è rilevabile dalla figura ribaltata sul piano (α). Individuate tutte le dimensioni reali del solido sezionato, si può procedere con lo sviluppo.

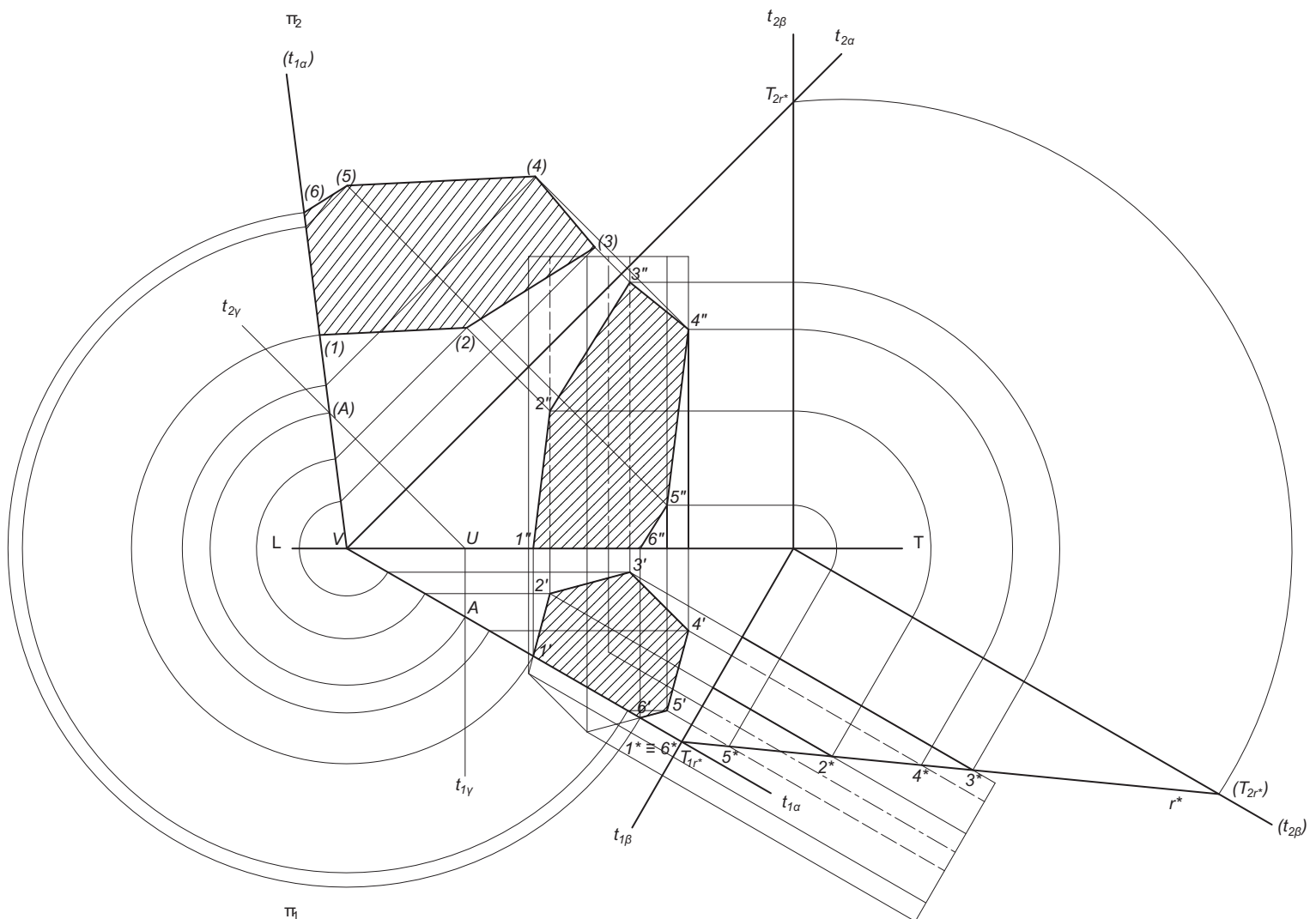


Fig. 41

- Si rappresenta per prima la superficie laterale riportando consecutivamente i segmenti della base $1B$, BC , CD , DE ed $E6$ e, in corrispondenza dei vertici, si innalzano gli spigoli. Individuati i punti 2, 3, 4 e 5 si congiungono in sequenza ottenendo la spezzata 123456 (► Fig. 42).

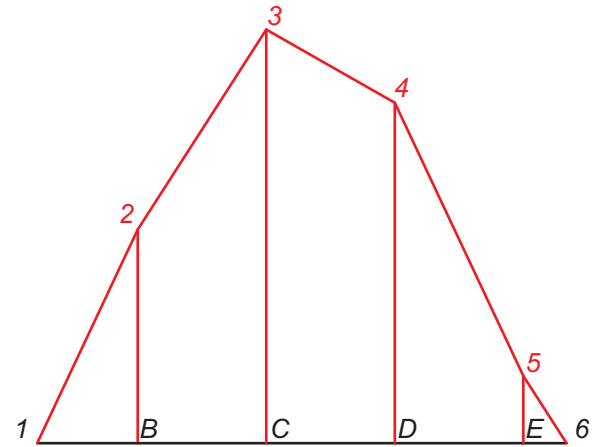


Fig. 42

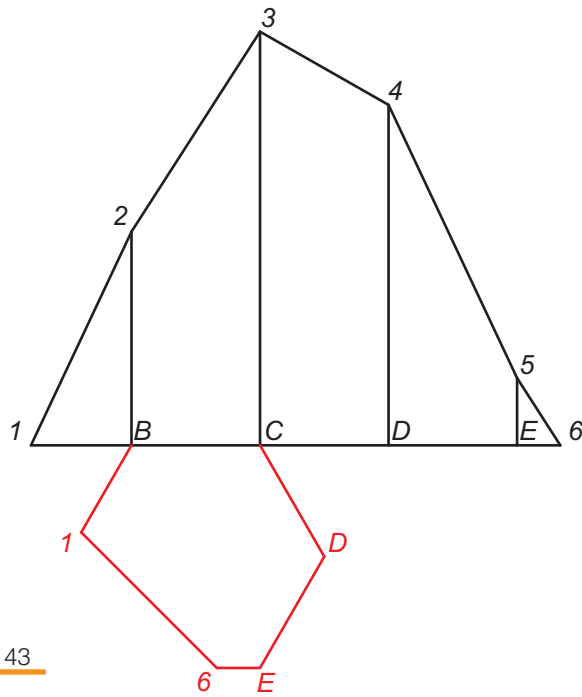


Fig. 43

- Su un lato di base (nell'esempio: BC) si costruisce la base identificata nelle proiezioni di riferimento dall'immagine su π_1 della porzione dell'esagono, tagliato in 16 dal piano di sezione α (► Fig. 43).

- A conclusione della rappresentazione, si riporta su un lato della spezzata (nell'esempio 23 corrispondente a BC sul quale nello step precedente si è inserita la base) la vera forma della sezione generata dal piano α che viene evidenziata applicandovi la campitura come da norma (► Fig. 44).

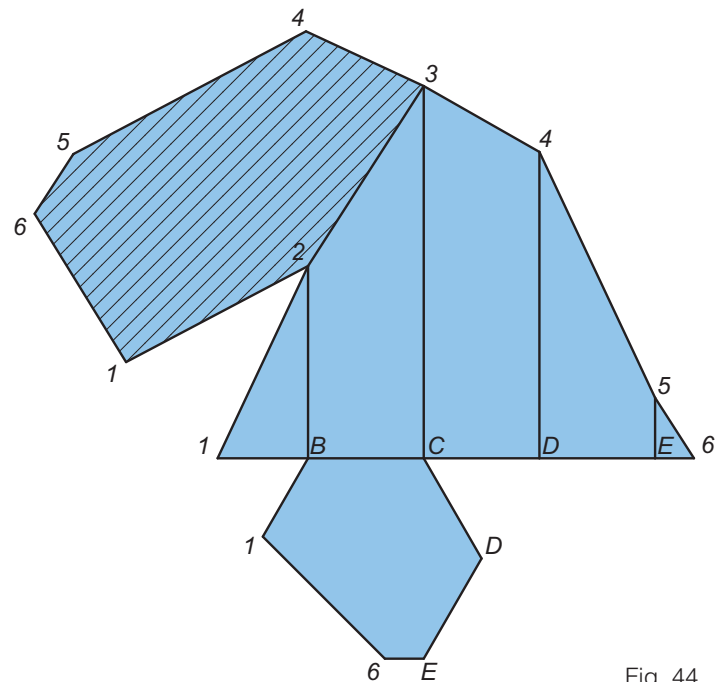


Fig. 44

Problema 11

Determinare lo sviluppo della piramide sezionata.

- Ricordiamo il risultato dalla ricerca della vera forma della sezione di una piramide retta, appoggiata con il vertice V su π_1 e con asse inclinato ai quadri, generata da un piano $\alpha \perp \pi_1 \angle \pi_2$ (► Fig. 45).

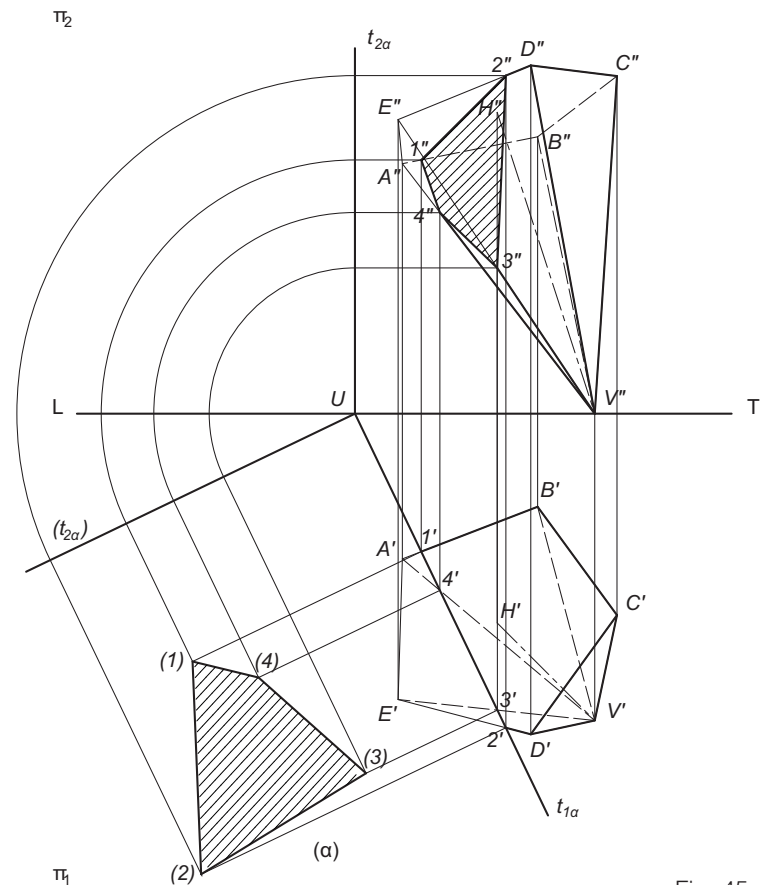


Fig. 45

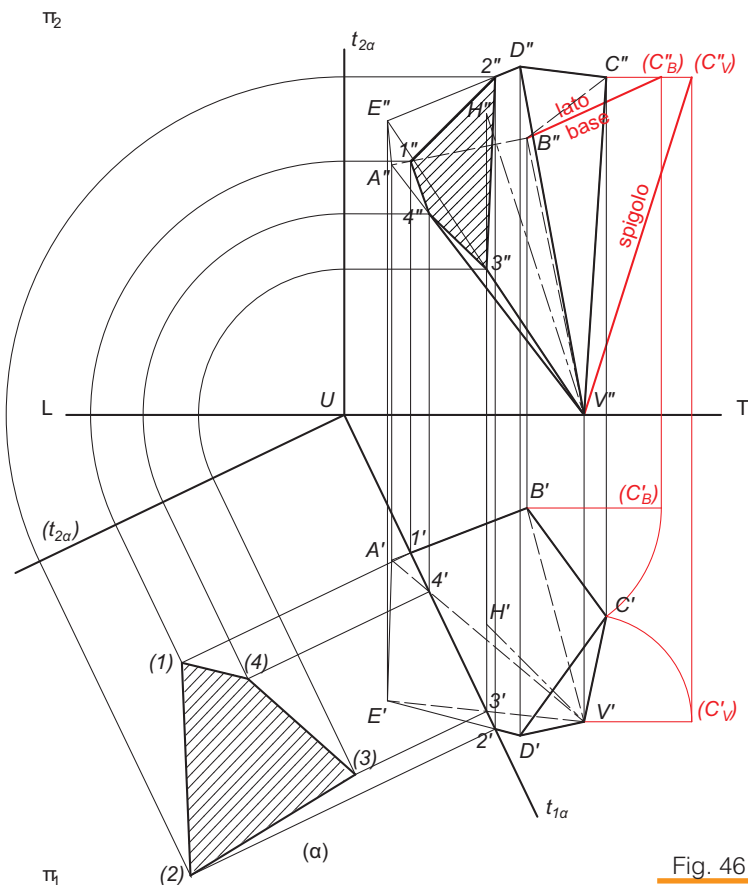


Fig. 46

- La piramide risulta inclinata a tutti i quadri: di conseguenza, per rappresentarne lo sviluppo, occorre determinare le misure reali degli spigoli di base e laterali. Si sceglie di operare sul lato di base $B'C'$ e sullo spigolo $V'C'$ che, prima ribaltati parallelamente a π_2 e poi proiettati su π_2 , consentono di ottenere le dimensioni reali del lato di base BC e dello spigolo VC (► Fig. 46).

- Individuate le dimensioni dello spigolo e del lato di base, è possibile rappresentare lo sviluppo della piramide. Fissato il vertice V , con centro in questo si descrive, con apertura VC , un arco sul quale vengono riportati, con apertura BC , i cinque lati della base. Congiungendo gli estremi dei lati, appena tracciati, a V si individuano gli spigoli laterali. Infine, su uno dei lati (nell'esempio: CD) si costruisce la base pentagonale della piramide (► Fig. 47).

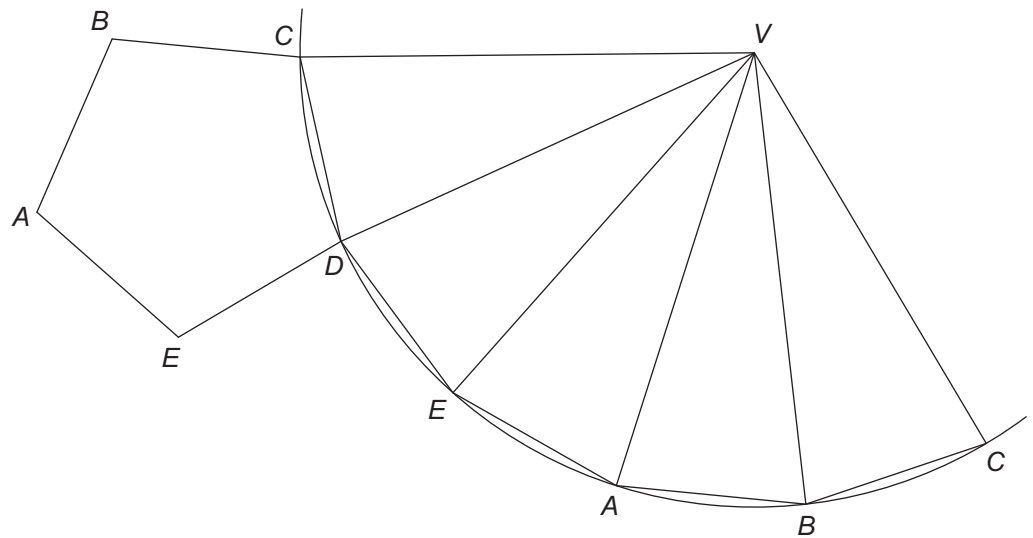


Fig. 47

- Per individuare, sullo sviluppo della piramide, la corretta posizione dei punti in cui il piano di sezione α interseca gli spigoli e i lati di base, si deve procedere con alcuni ribaltamenti. Per determinare la posizione dei punti 3 e 4, giacenti sugli spigoli laterali, la procedura più comoda è quella di trovare la loro distanza reale dal vertice V . Per il punto 3 occorre determinare la dimensione di $V3$, mentre per il punto 4 la misura di $V4$. Perciò, per esempio, per ottenere $V3$ si ribalta la sua immagine $V''3''$ fino a renderla parallela a π_1 (in realtà, poiché V giace su π_1 , si ribalta $V''3''$ proprio su π_1) e poi si proietta su π_1 individuando la dimensione cercata di $V3$. Allo stesso modo si procede per la ricerca della dimensione di $V4$. Per determinare la collocazione del segmento 12 (di cui è già nota la dimensione reale) sulla base della piramide è sufficiente individuare la distanza di un suo estremo da un vertice di base. Si sceglie di trovare la distanza reale di 1 da B procedendo come descritto per $V3$ e $V4$ (► Fig. 48).

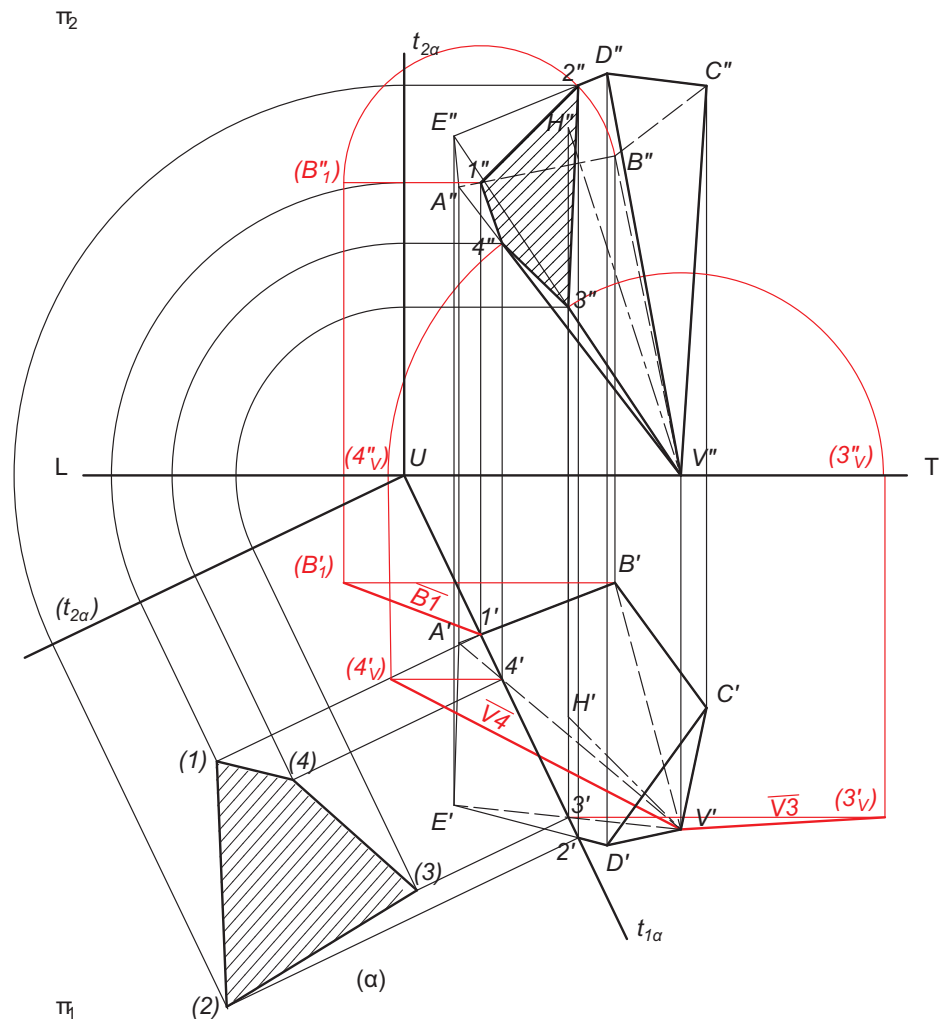
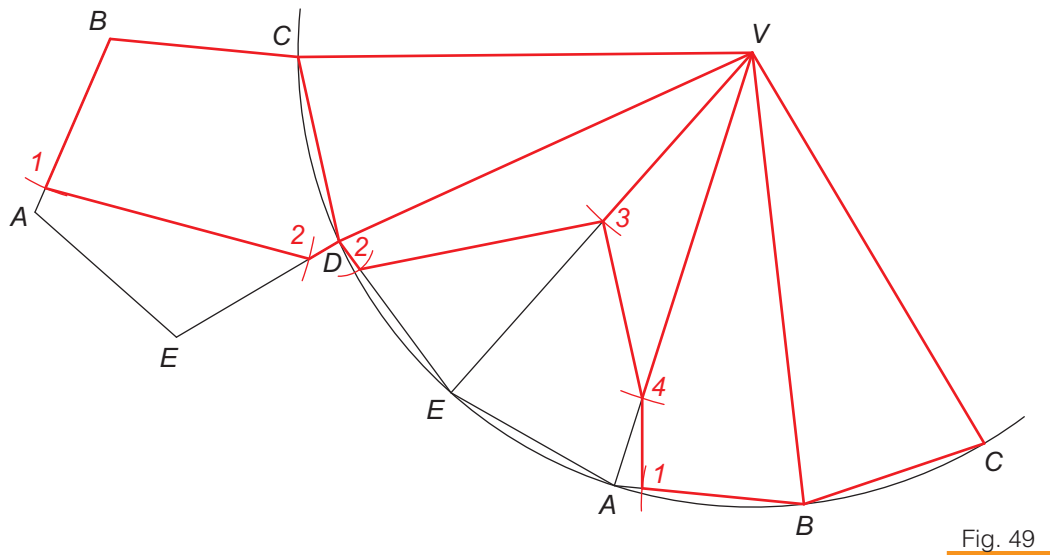
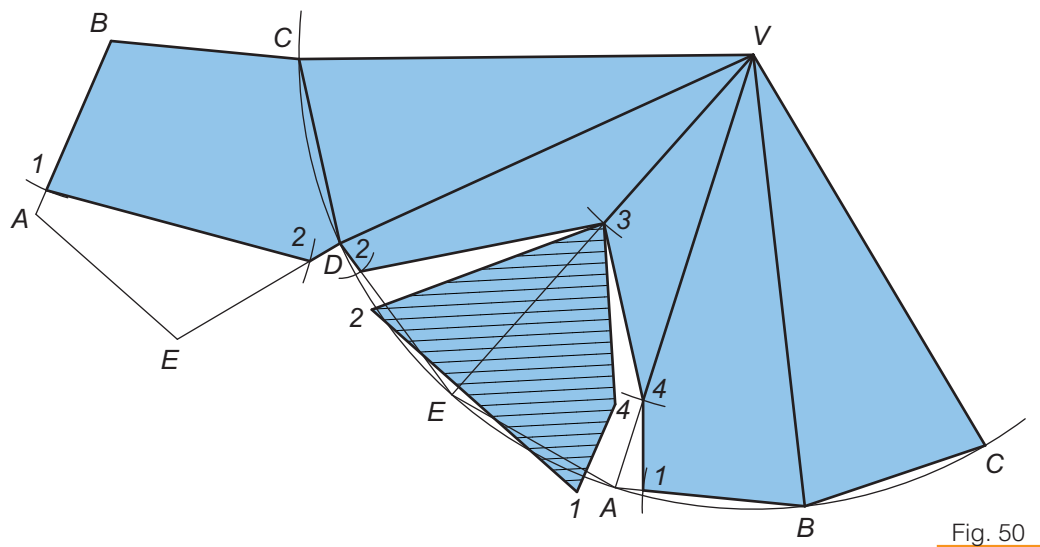


Fig. 48

- Si sono così determinate tutte le misure necessarie per la costruzione dello sviluppo della piramide sezionata. Ora, nello sviluppo della piramide precedentemente disegnato, si riportano su VE il punto 3 (distante $V3$ da V), su VA il punto 4 (distante $V4$ da V) e sul lato AB il punto 1 (distante $B1$ da B). Nella base pentagonale, per trovare la collocazione di 12, si posiziona su AB il punto 1 (distante $B1$ da B), quindi centrando il compasso in 1, con apertura 12, si descrive un archetto che interseca DE nel punto 2. Centrando in D con apertura $D2$ si riporta 2 su DE nello sviluppo della superficie laterale. Si congiungono così i punti trovati (► Fig. 49).



- Si completa la rappresentazione inserendo la vera superficie della sezione 1234 evidenziandola con la specifica campitura (► Fig. 50).



Problema 12

Determinare lo sviluppo di un cono retto con asse $\perp \pi_1$, sezionato con un piano ortogonale a π_2 e parallelo alla generatrice.

■ Riprendiamo il risultato ottenuto nelle doppie proiezioni con la ricerca della vera forma della sezione (► Fig. 51).

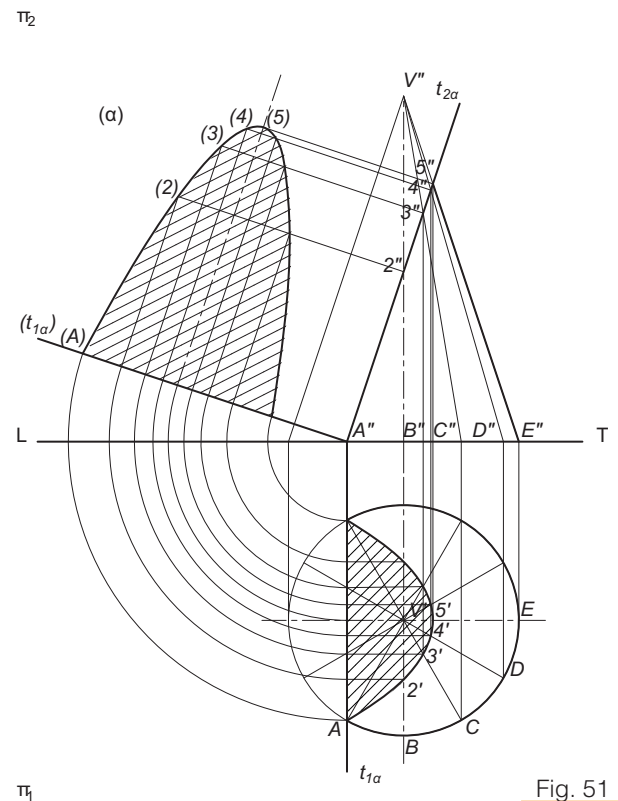
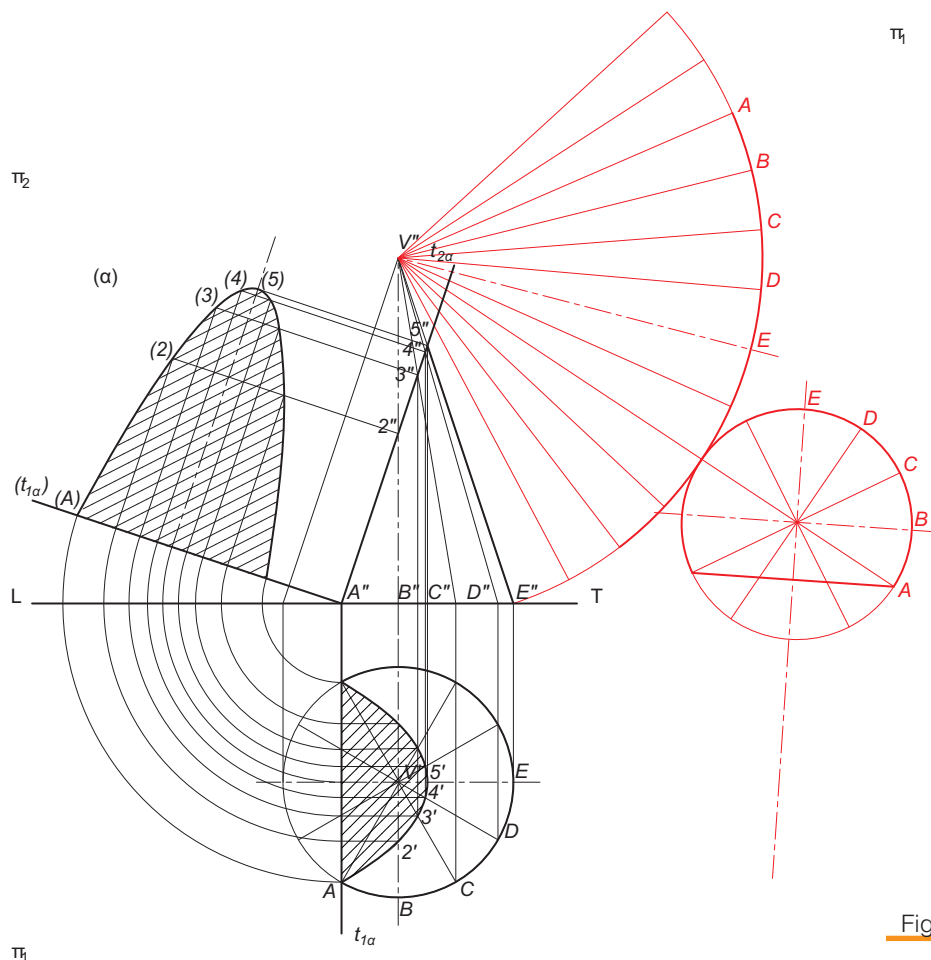


Fig. 51



■ Si esegue, iniziando dalla generatrice $V''E''$, lo sviluppo del cono. Così, puntando in V'' , si descrive da E'' un arco sul quale si riportano le parti in cui è stata divisa la circonferenza di base e si evidenzia, con segno 01.2, la porzione di arco rimanente dopo il taglio. Si tracciano le generatrici per gli estremi degli archi individuati e si colloca la sezione del cerchio di base, impostata su una generatrice, in modo che risulti tangente al settore circolare (► Fig. 52).

Fig. 52

■ Si proiettano i punti 2'', 3'', 4'' e 5'', individuati dalle intersezioni delle generatrici con il piano di sezione α , sulla generatrice $V''E''$ utilizzata come base per lo sviluppo del cono. Per i punti appena trovati, con centro in V'' , si descrivono archi concentrici all'arco del settore circolare; dalle intersezioni di tali archi con le generatrici corrispondenti si ottengono i punti 2, 3, 4 e 5 per i quali passa il contorno della superficie di sezione. Congiungendoli in sequenza con un curvilineo e operando per simmetria, rispetto all'asse, si ottiene la curva cercata i cui estremi coincidono con quelli della porzione di arco dalla base del cono (► Fig. 53).

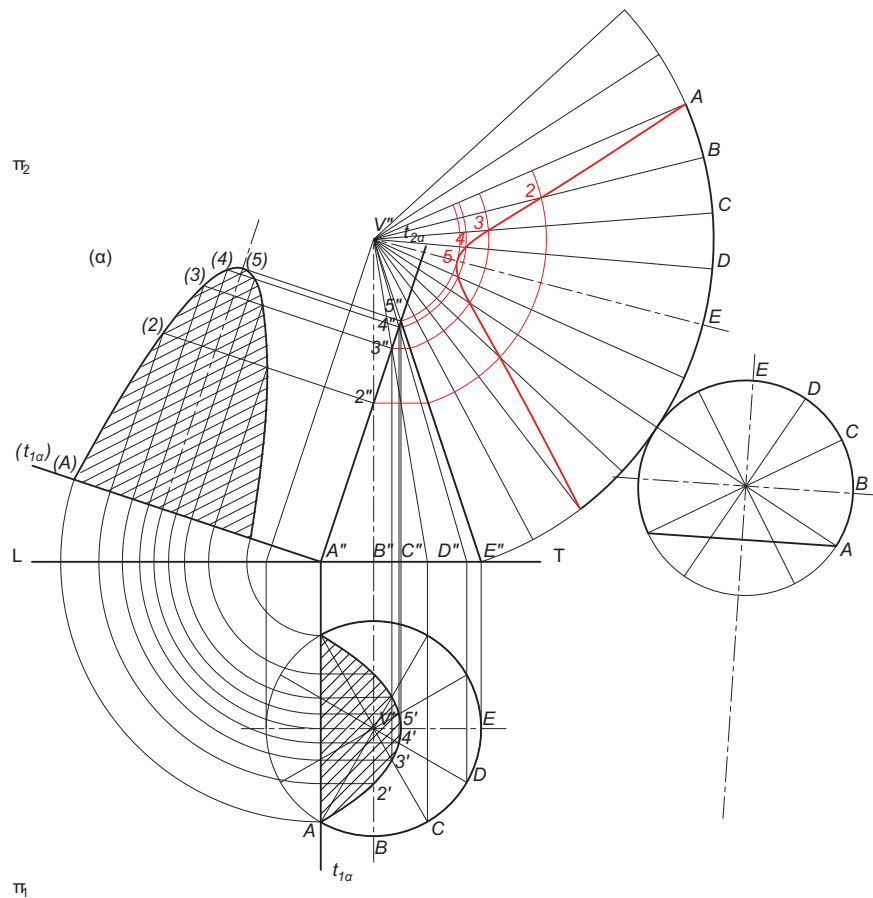
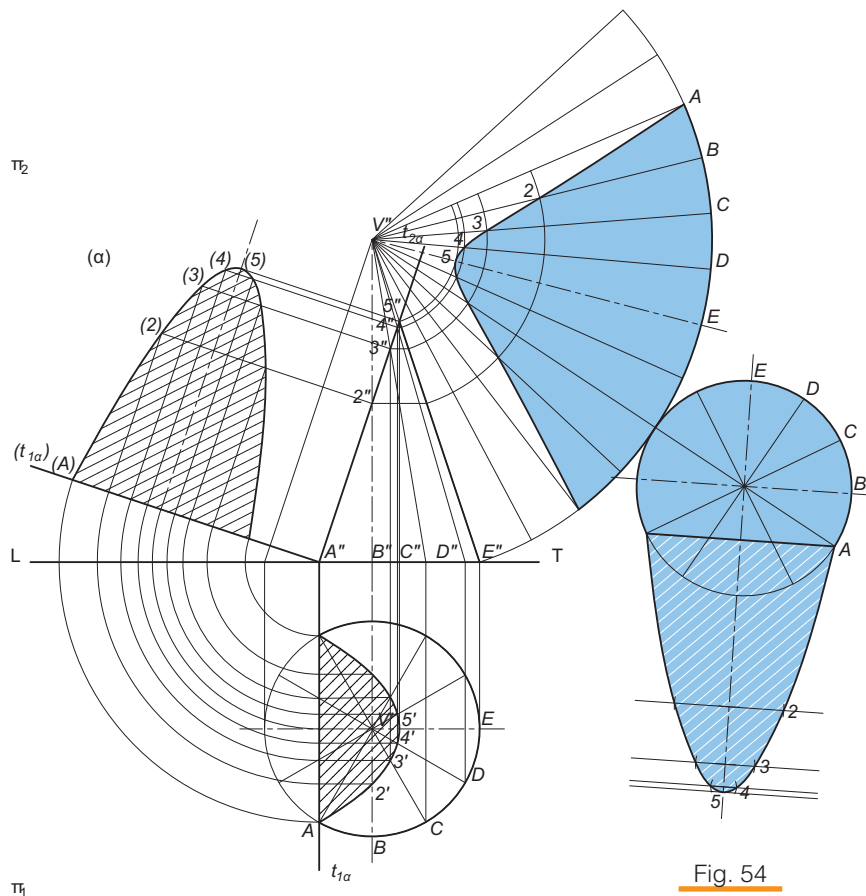


Fig. 53



■ Si completa lo sviluppo riportando sul cerchio di base sezionato la vera forma della sezione (parabola) impostata sull'asse di simmetria e con la parte inferiore coincidente con il taglio del cerchio (► Fig. 54).

Fig. 54

Problema 13

Determinare lo sviluppo della sezione di un cono retto con asse $\perp \pi_1$ ottenuta con un piano $\alpha \parallel \pi_3$.

- Le proiezioni ortogonali della sezione richiesta sono riportate nella ► **Figura 55**. Poiché il piano α è parallelo a π_3 la vera forma della sezione è rilevabile su π_3 stesso.

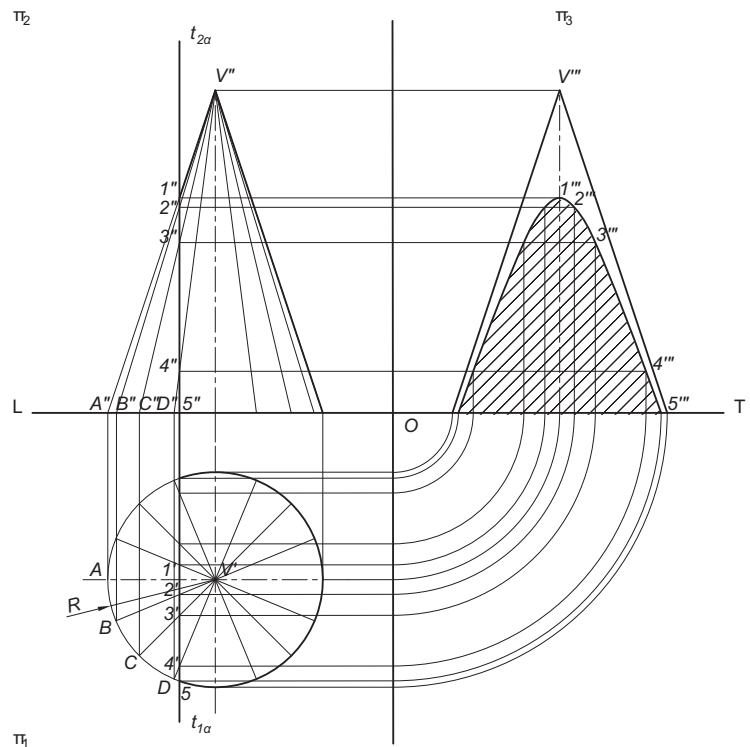
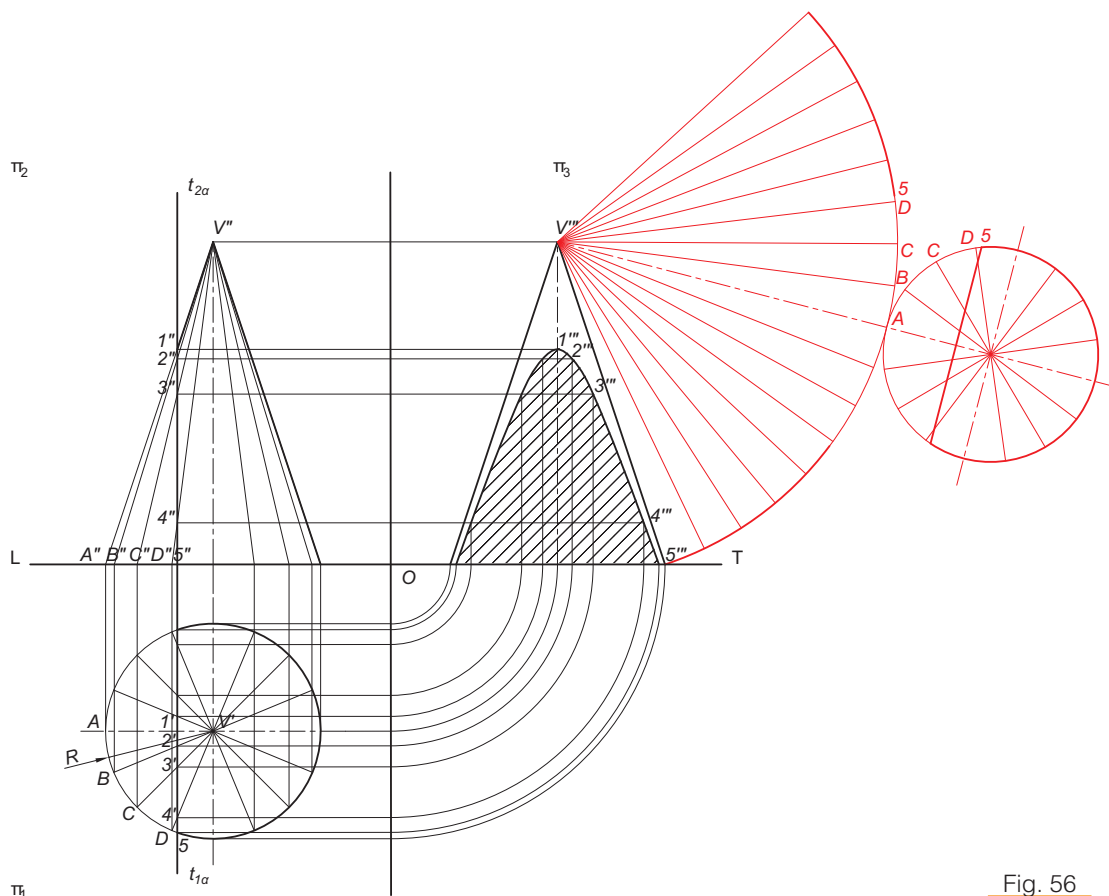


Fig. 55



- Lo sviluppo del cono si esegue puntando in V''' e descrivendo, con apertura uguale alla generatrice, un arco sul quale si riportano le parti in cui è stata divisa la circonferenza di base. Si evidenziano, con segno 01.2, le porzioni di arco rimanenti dopo il taglio. Si tracciano le generatrici per gli estremi degli archi individuati e si colloca la sezione del cerchio di base, impostata sull'asse, in modo che risulti tangente al settore circolare che rappresenta lo sviluppo del cono (► **Fig. 56**).

Fig. 56

■ Si proiettano i punti $1'''$, $2'''$, $3'''$, $4'''$ e $5'''$, individuati dalle intersezioni delle generatrici con il piano di sezione α , sulla generatrice utilizzata come base per lo sviluppo del cono. Per i punti appena trovati, con centro in V''' , si descrivono archi concentrici all'arco del settore circolare; dalle intersezioni di tali archi con le generatrici corrispondenti si ottengono i punti 1, 2, 3 e 4 per i quali passa il contorno della superficie di sezione. Congiungendoli in sequenza con un curvilineo e operando per simmetria, rispetto all'asse, si ottiene la curva cercata (► Fig. 57).

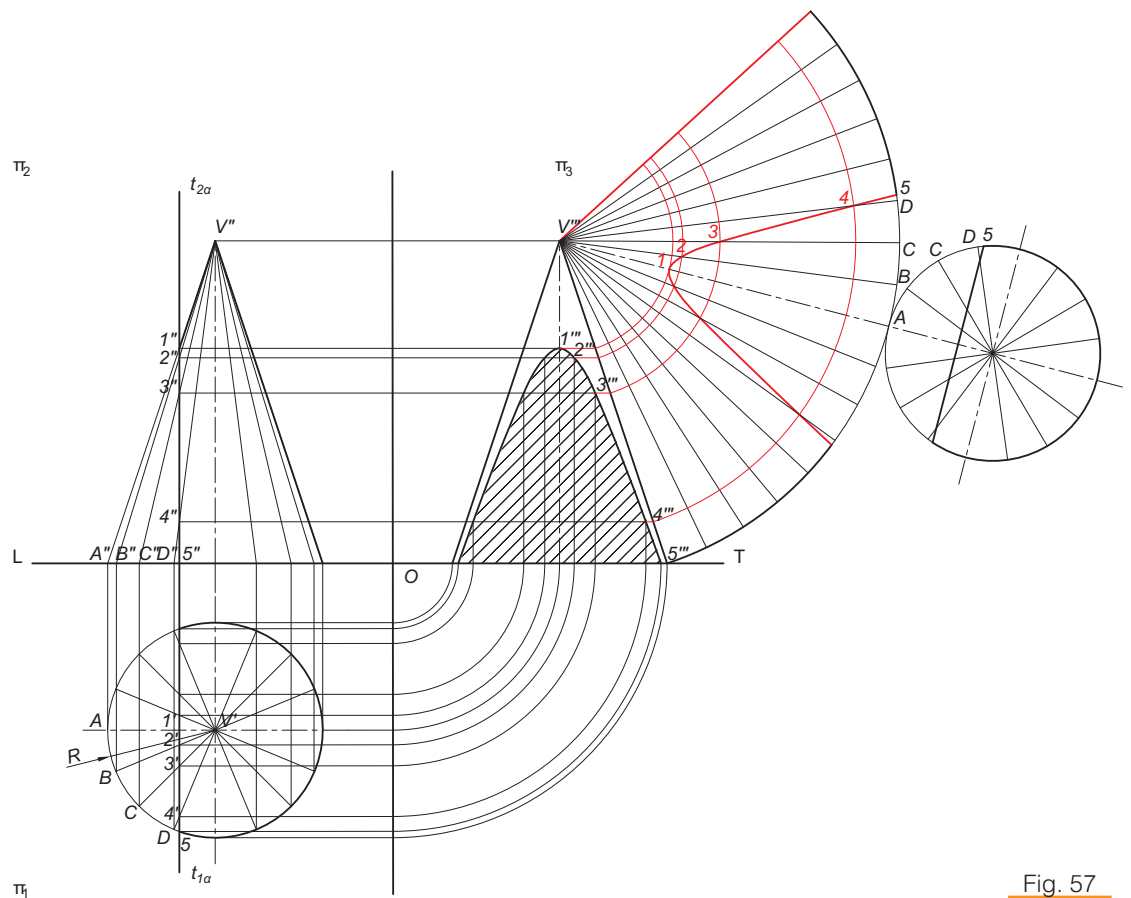
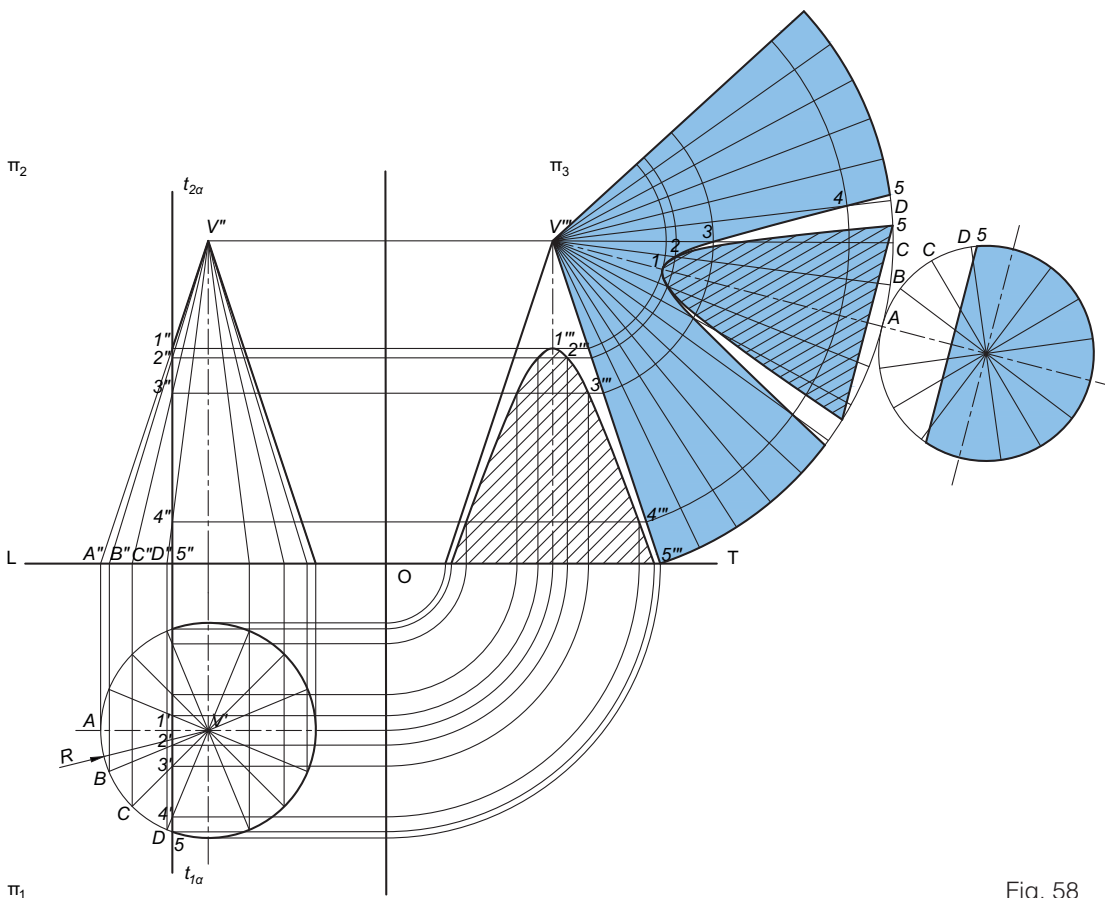


Fig. 57



■ Si completa lo sviluppo riportando, tangente al punto 1 e impostata sull'asse di simmetria, la vera forma della sezione (iperbole) rilevata dalla terza proiezione (► Fig. 58).

Fig. 58