



COINCIDENZA

Di seguito vengono descritte le condizioni affinché punti, rette e piani coincidano tra loro. Diversi esempi danno la possibilità di comprendere casi particolari e quelli di maggior interesse.

La coincidenza è un invariante proiettivo e pertanto si conserva indipendentemente dai processi proiettivi a cui viene sottoposta.

La tabella dell'“operatore coincidente” rende esplicita la modalità di interazione con gli enti geometrici.

\equiv	P	r	α
P	✓		
r		✓	
α			✓

dove: P = punto, r = retta, α = piano.

INDICAZIONI CONVENZIONALI

\Leftrightarrow	Se e solo se
\Rightarrow	Implicazione diretta (allora)
\Leftarrow	Implicazione inversa
\equiv	Coincidente

1. Coincidenza punto-punto ($P \equiv V$)

CONDIZIONE COINCIDENZA PUNTO-PUNTO

Due punti sono coincidenti se e solo se le loro immagini omonime coincidono.

INDICAZIONE SIMBOLICA

$$P \equiv V \Leftrightarrow P' \equiv V', P'' \equiv V''$$

Implicazione diretta \Rightarrow :

se – nello spazio – due punti coincidono, allora – nelle proiezioni ortogonali – le loro immagini omonime coincidono.

Implicazione inversa \Leftarrow :

se – nelle proiezioni ortogonali – le immagini omonime di due punti coincidono, allora – nello spazio – i due punti sono coincidenti.

Nelle rappresentazioni obiettive e descrittive che seguono, con riferimento al I diedro, è possibile verificare intuitivamente quanto precedentemente detto.

1. Se due punti sono distinti le loro immagini risulteranno distinte (► **Figg. 1, 2**).

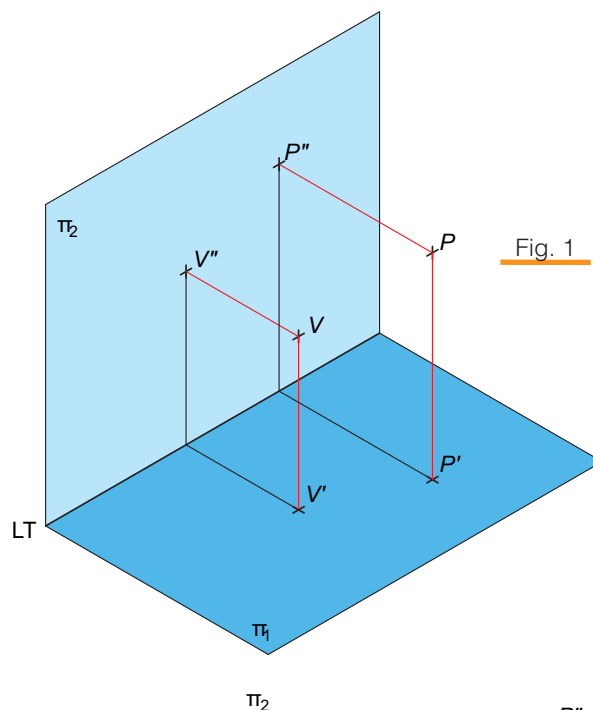


Fig. 1

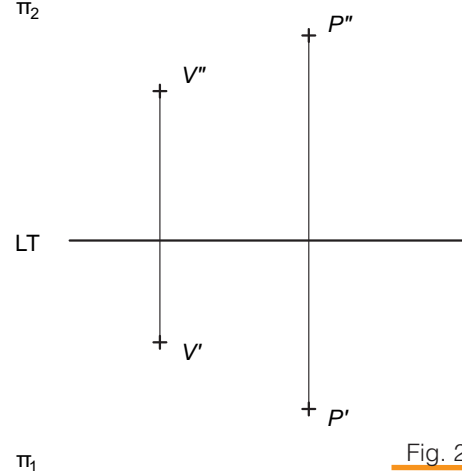
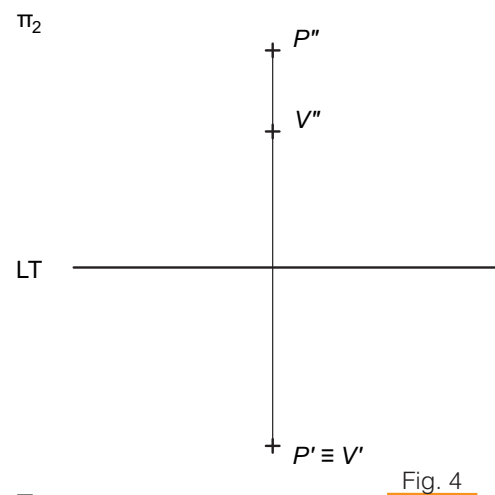
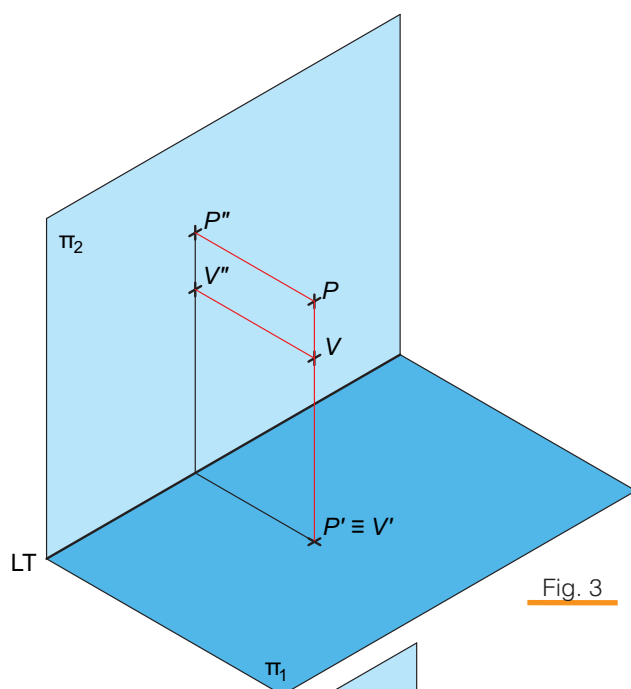
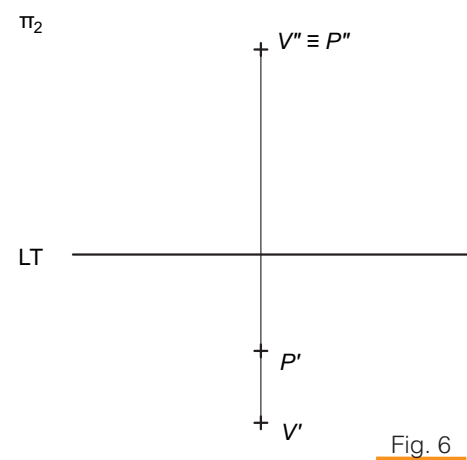
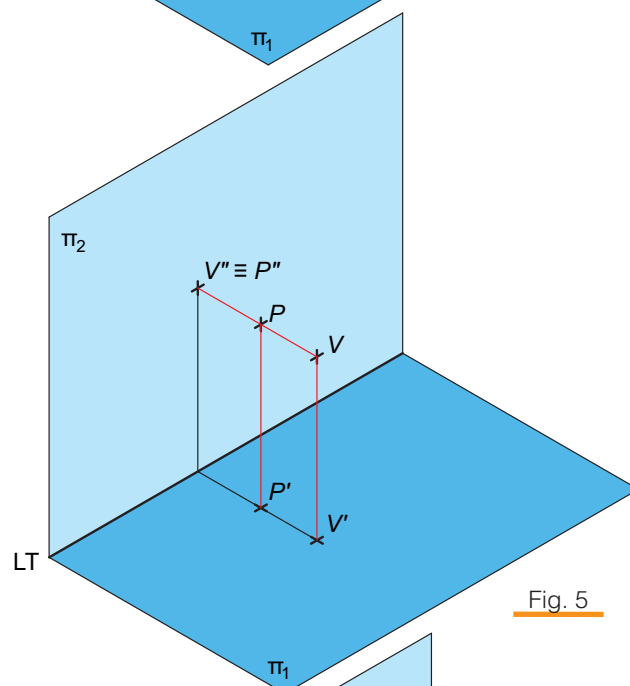


Fig. 2

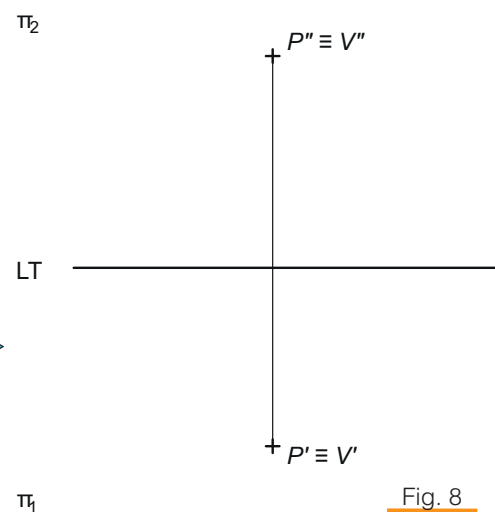
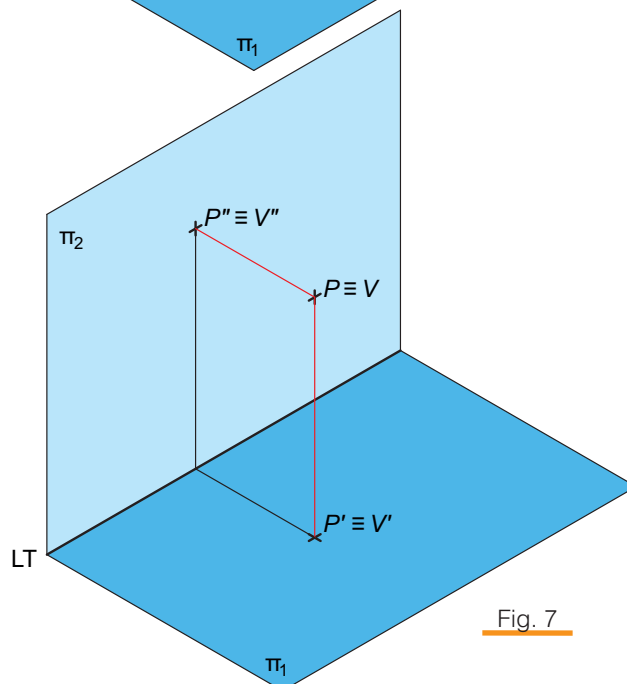
2. Se due punti sono allineati rispetto alla proiezione verticale su π_1 coincideranno solo le loro immagini prime (► **Figg. 3, 4**).



3. Se due punti sono allineati rispetto alla proiezione orizzontale su π_2 coincideranno solo le loro immagini seconde (► **Figg. 5, 6**).



4. Se due punti sono allineati rispetto alla proiezione orizzontale su π_2 e anche rispetto alla proiezione verticale su π_1 , cioè se i due punti coincidono, allora coincideranno anche le loro rispettive immagini omonime (► **Figg. 7, 8**).



2. Coincidenza retta-retta ($r \equiv s$)

CONDIZIONE COINCIDENZA RETTA-RETTA

Due rette sono coincidenti se e solo se le loro immagini omonime coincidono.

INDICAZIONE SIMBOLICA

$$r \equiv s \Leftrightarrow r' \equiv s', r'' \equiv s'', r''' \equiv s'''$$

Implicazione diretta \Rightarrow :

se – nello spazio – due rette coincidono, allora – nelle proiezioni ortogonali – le loro immagini omonime coincidono.

Implicazione inversa \Leftarrow :

se – nelle proiezioni ortogonali – le immagini omonime di due rette coincidono, allora – nello spazio – le due rette sono coincidenti.

Nelle seguenti rappresentazioni obiettive e descrittive, con riferimento al I diedro, è possibile verificare intuitivamente, con il supporto di alcune esemplificazioni, quanto precedentemente detto.

1. Due rette distinte nello spazio avranno immagini distinte nelle proiezioni (► Fig. 9).

Nella rappresentazione descrittiva si ha (► Fig. 10):

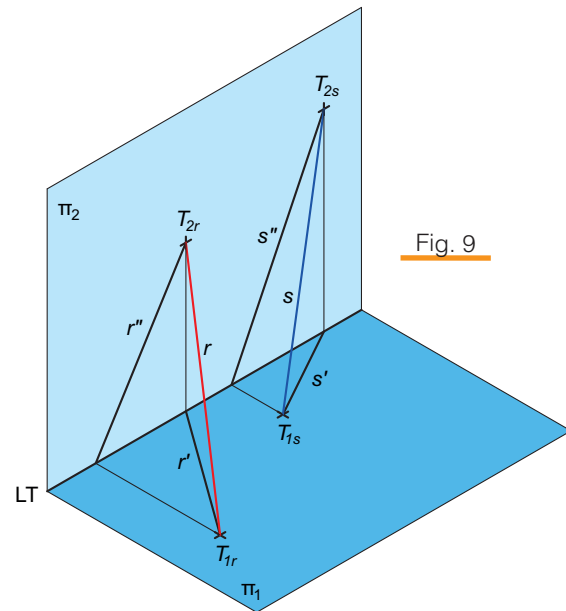


Fig. 9

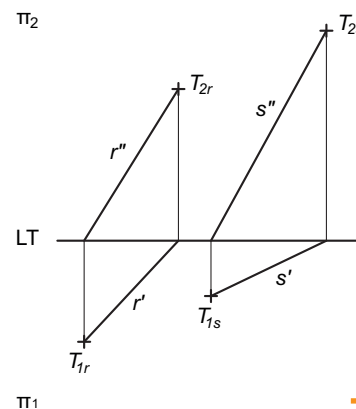


Fig. 10

2. Se le due rette risultano allineate rispetto alla proiezione verticale su π_1 , allora coincideranno le loro immagini prime o solo una parte di esse: in questo caso le immagini r' ed s' delle due rette r ed s coincidono solo per il tratto compreso fra T_{1s} ed LT, praticamente per tutta la lunghezza dell'immagine s' (► Fig. 11).

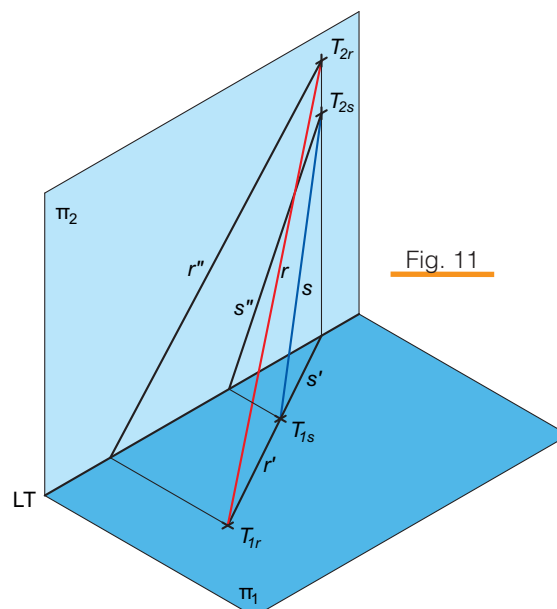


Fig. 11

Nella rappresentazione descrittiva si ha (► Fig. 12):

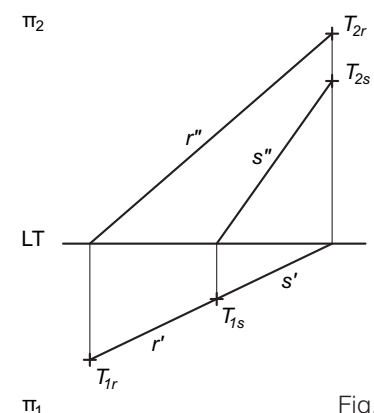


Fig. 12

3. Per ottenere la coincidenza per tutta la lunghezza delle immagini prime di due rette, allineate rispetto alla proiezione verticale su π_1 , è evidente che devono risultare coincidenti le due tracce prime delle rette, T_{1r} e T_{1s} , similmente all'esempio in ► **Figura 13**.

Nella rappresentazione descrittiva si ha (► **Fig. 14**):

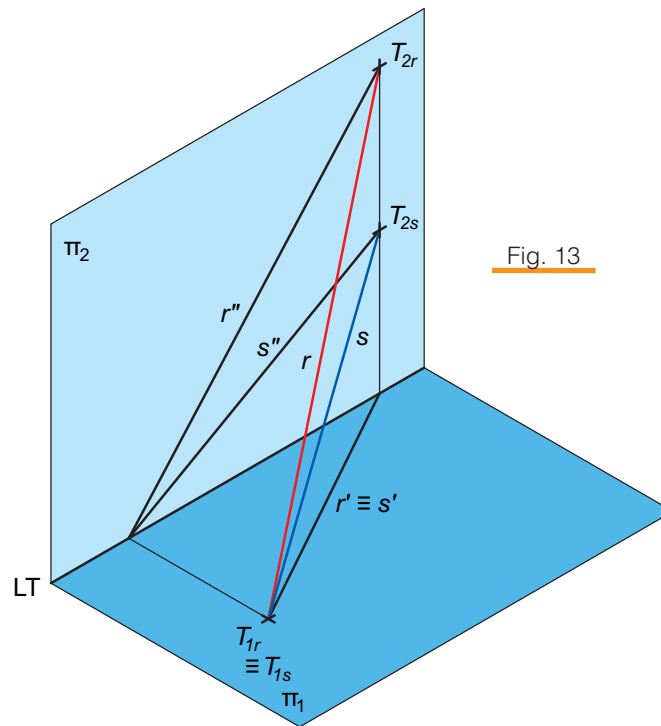


Fig. 13

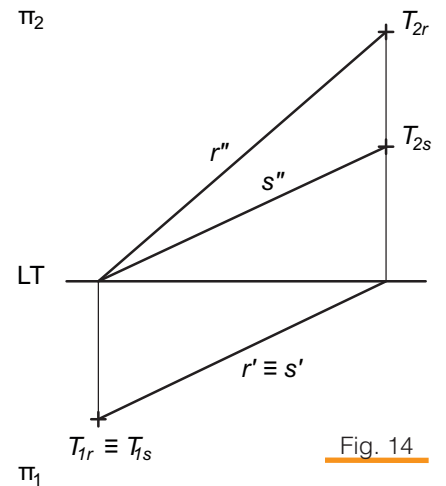


Fig. 14

4. Se le due rette sono allineate rispetto alla proiezione orizzontale su π_2 , allora coincideranno le loro immagini seconde o solo una parte di esse: in questo caso le immagini r'' ed s'' delle due rette r ed s coincidono solo per il tratto compreso fra T_{2s} ed LT, praticamente per tutta la lunghezza dell'immagine s'' (► **Fig. 15**).

Nella rappresentazione descrittiva si ha (► **Fig. 16**):

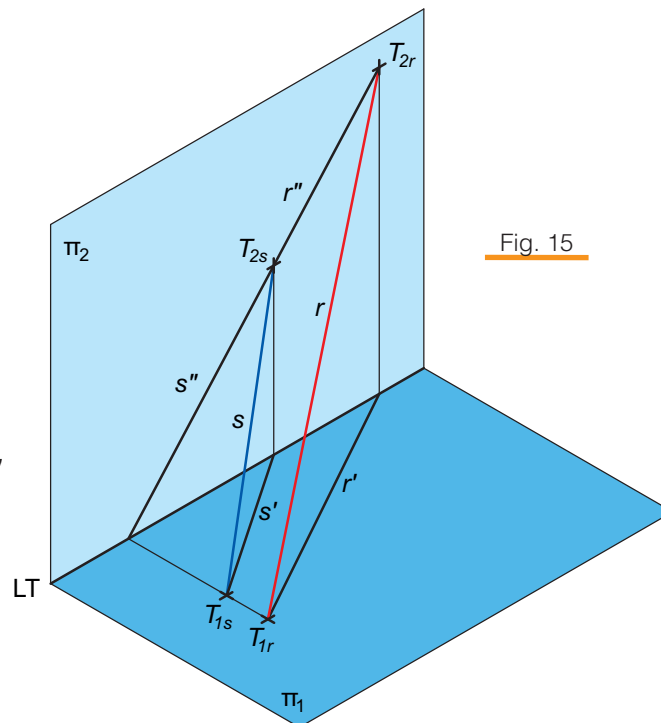


Fig. 15

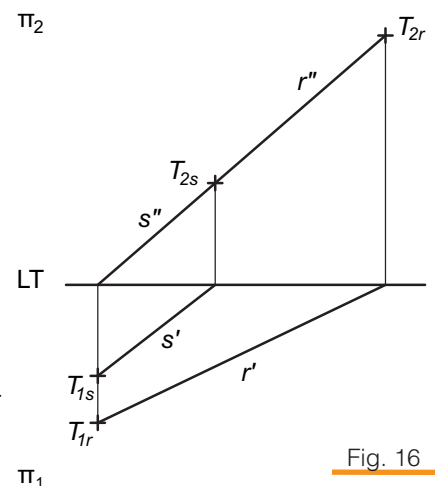


Fig. 16

5. Per ottenere la coincidenza per tutta la lunghezza delle immagini seconde di due rette, allineate rispetto alla proiezione orizzontale su π_2 , è evidente che devono risultare coincidenti le due tracce seconde delle rette, T_{2r} e T_{2s} , come nell'esempio in ► **Figura 17**.

Nella rappresentazione descrittiva si ha (► **Fig. 18**):

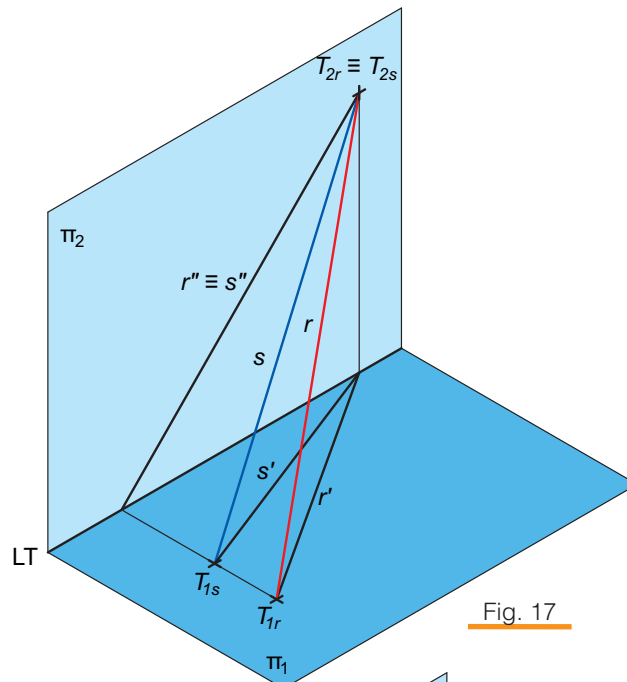


Fig. 17

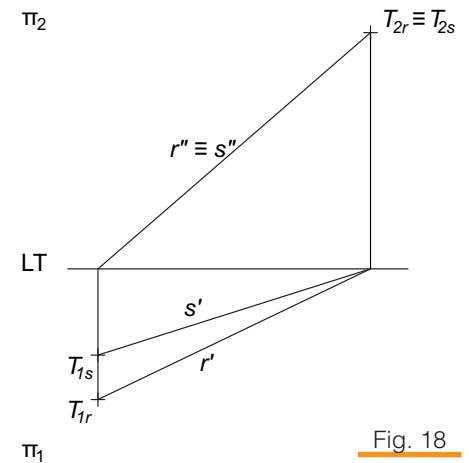


Fig. 18

6. Ora, da quanto precedentemente illustrato, si può comprendere che per ottenere la coincidenza per tutta la lunghezza delle immagini prime e seconde di due rette, è indispensabile che siano coincidenti le tracce prime e seconde delle rette, come nell'esempio in ► **Figura 19**.

Nella rappresentazione descrittiva si ha (► **Fig. 20**):

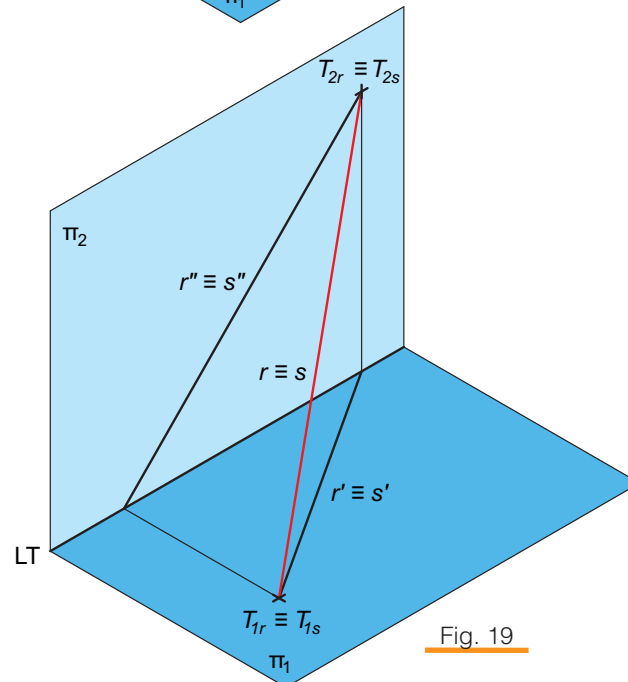


Fig. 19

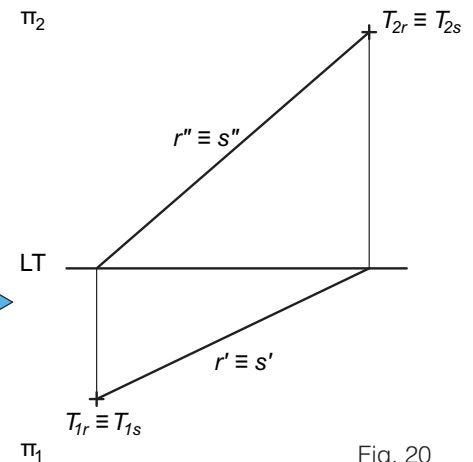


Fig. 20

Pertanto, alla luce degli esempi rappresentati, si può affermare anche che:

CONDIZIONE COINCIDENZA RETTA-RETTA

Due rette sono coincidenti se e solo se le loro tracce omonime coincidono.

INDICAZIONE SIMBOLICA

$$r \equiv s \Leftrightarrow T_{1r} \equiv T_{1s}, T_{2r} \equiv T_{2s}$$

Quindi, affinché due rette risultino coincidenti, è sufficiente che sia verificata una delle seguenti condizioni:

- le immagini omonime siano coincidenti $r' \equiv s'$, $r'' \equiv s''$ ed $r''' \equiv s'''$;
- le tracce omonime siano coincidenti $T_{1r} \equiv T_{1s}$ e $T_{2r} \equiv T_{2s}$.

3. Coincidenza piano-piano ($\alpha \equiv \beta$)

CONDIZIONE COINCIDENZA PIANO-PIANO

Due piani sono coincidenti se e solo se le loro tracce omonime coincidono.

INDICAZIONE SIMBOLICA

$$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow t_{1\alpha} \equiv t_{1\beta}, t_{2\alpha} \equiv t_{2\beta}$$

Implicazione diretta \Rightarrow :

se – nello spazio – due piani coincidono, allora – nelle proiezioni ortogonali – le loro tracce omonime coincidono.

Implicazione inversa \Leftarrow :

se – nelle proiezioni ortogonali – le tracce omonime di due piani coincidono, allora – nello spazio – i due piani sono coincidenti.

Nelle seguenti rappresentazioni obiettive e descrittive, riferite al I diedro, è possibile verificare intuitivamente, con il supporto di alcune esemplificazioni, quanto precedentemente detto.

1. Due piani distinti nello spazio avranno tracce omonime distinte nelle proiezioni (► Fig. 21).

Nella rappresentazione descrittiva si ha (► Fig. 22):

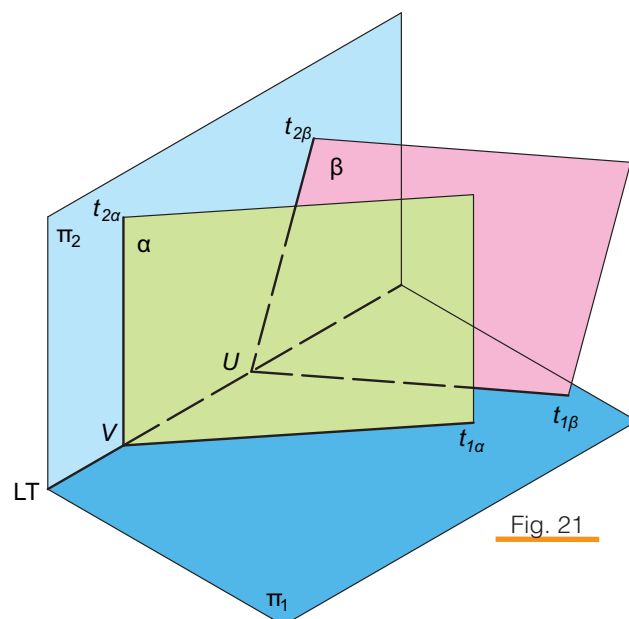


Fig. 21

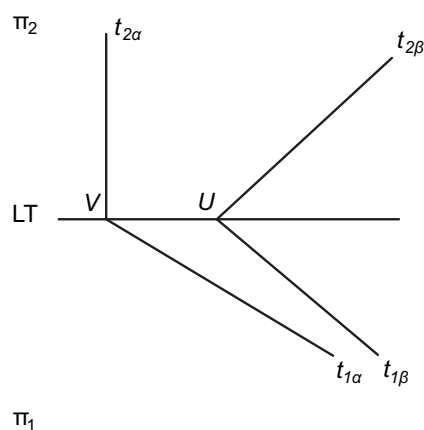


Fig. 22

2. Se due piani appartengono allo stesso fascio di piani con asse generatore giacente su π_1 , allora le loro tracce prime coincideranno sia tra loro sia con l'asse generatore, mentre le tracce seconde risulteranno distinte (► Fig. 23).

Nella rappresentazione descrittiva si ha (► Fig. 24):

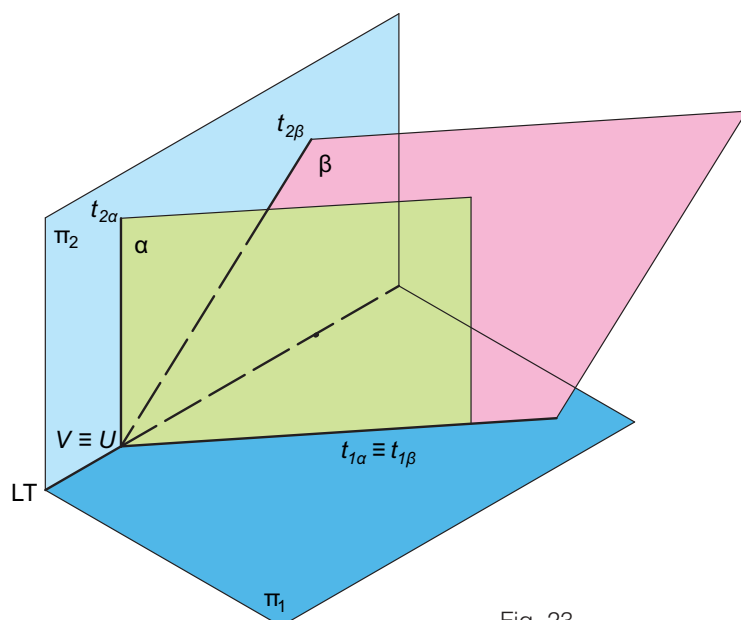


Fig. 23

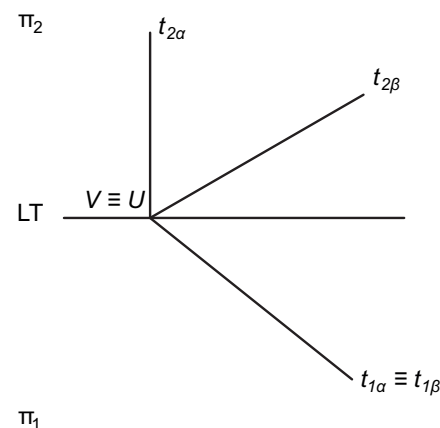


Fig. 24

3. Se due piani appartengono allo stesso fascio di piani con asse generatore giacente su π_2 , allora le loro tracce seconde coincideranno sia tra loro sia con l'asse generatore, mentre le tracce prime risulteranno distinte (► Fig. 25).

Nella rappresentazione descrittiva si ha (► Fig. 26):

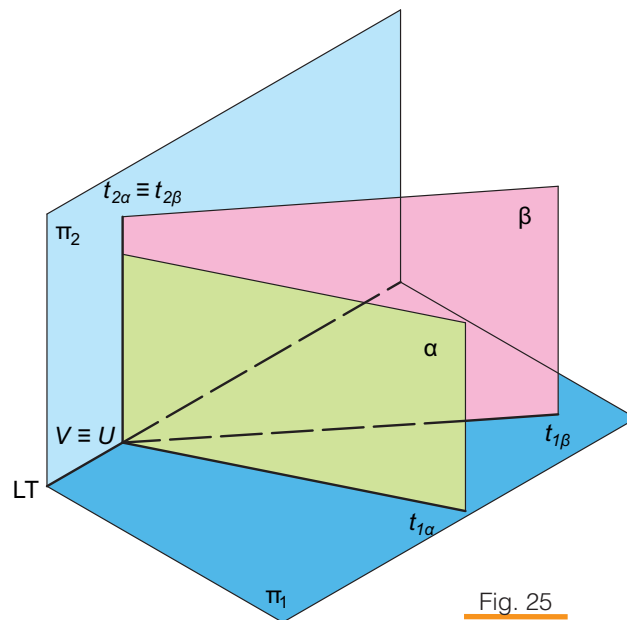


Fig. 25

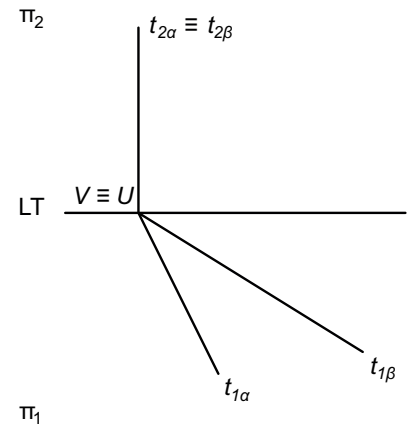


Fig. 26

4. Si può facilmente intuire che per ottenere la coincidenza di due piani è necessario che le tracce prime e seconde dei piani stessi siano coincidenti come nell'esempio in ► Figura 27.

Nella rappresentazione descrittiva si ha (► Fig. 28):

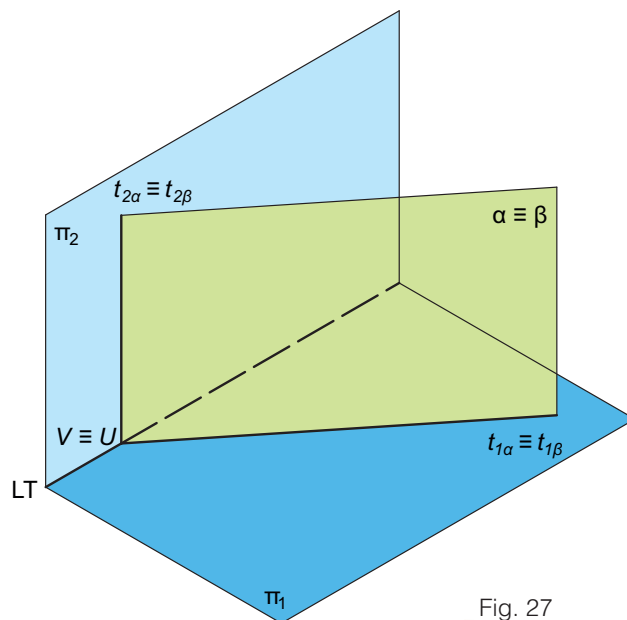


Fig. 27

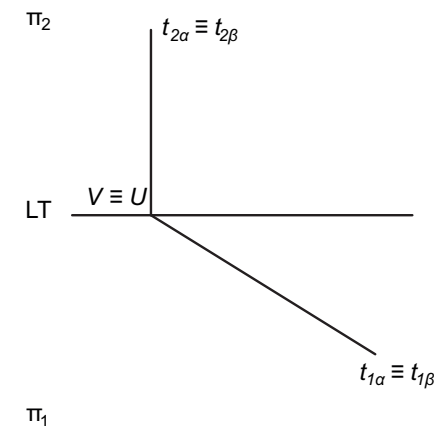


Fig. 28