

APPROFONDIMENTI SUI POLIEDRI

1. Dualità dei solidi platonici

Si indica, quale struttura combinatoria di un poliedro, l'insieme delle sue caratteristiche geometriche (Facce, Spigoli e Vertici) e le loro relazioni di incidenza. A ogni poliedro è perciò possibile associare una terna $(F;S;V)$ che rappresenta la descrizione della sua struttura combinatoria. In relazione a tale struttura a ogni poliedro P ne corrisponde un altro Q , caratterizzato da una particolare struttura, detto duale.

POLIEDRO DUALE

Dato un generico poliedro P , il suo duale Q è il poliedro i cui vertici coincidono con il baricentro delle facce di P e i cui spigoli sono i segmenti che uniscono i baricentri delle facce di P .

Dal punto di vista pratico la determinazione del duale Q di un poliedro P si ottiene invertendo il ruolo delle facce e dei vertici del poliedro di partenza. Così, ricavando dalla tabella comparativa dei solidi platonici il numero delle facce F e dei vertici V dei diversi poliedri e invertendone il ruolo rispettivamente in V_D e in F_D , si ottiene:

Poliedro regolare	Facce (F)	Vertici (V)	Facce (F_D)	Vertici (V_D)	Poliedro duale
Tetraedro	4	4	4	4	Tetraedro
Esaedro (Cubo)	6	8	8	6	Ottaedro
Ottaedro	8	6	6	8	Esaedro (Cubo)
Dodecaedro	12	20	20	12	Icosaedro
Icosaedro	20	12	12	20	Dodecaedro

Come prima cosa si nota che il tetraedro ha la stessa struttura combinatoria del suo duale, di conseguenza la figura solida duale è identica al poliedro di partenza: il duale del tetraedro è lo stesso tetraedro. Questa caratteristica definisce il tetraedro come auto-duale. Inoltre il duale dell'esaedro è l'ottaedro e, viceversa, il duale dell'ottaedro è l'esaedro, come pure il duale dell'icosaedro è il dodecaedro e, viceversa, il duale del dodecaedro è l'icosaedro.

Tenendo presente la definizione appena enunciata di solido duale, la rappresentazione tridimensionale dei solidi duali, indicati con i soli spigoli segnati in rosso, relativi ai corrispondenti solidi di partenza, rappresentati con le facce colorate, è la seguente:

- **tetraedro**: attraverso la tracciatura delle mediane si determinano i baricentri delle singole facce (triangoli equilateri) che congiunti tre a tre generano il tetraedro, solido duale rispetto a quello di partenza (► Fig. 1);
- **esaedro regolare** (cubo): mediante la tracciatura delle diagonali si determinano i baricentri delle singole facce (quadrati) che congiunti quattro a quattro generano l'ottaedro, solido duale dell'esaedro regolare (► Fig. 2);

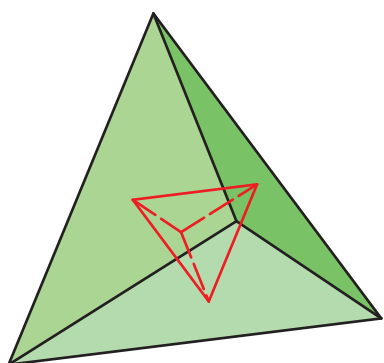


Fig. 1

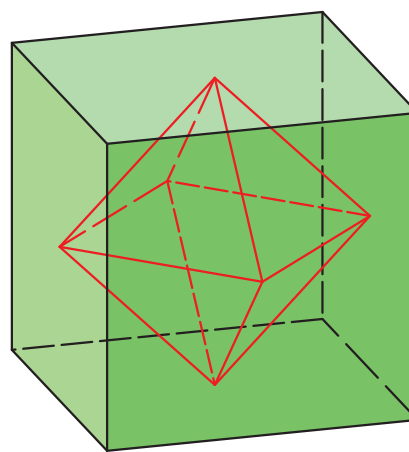


Fig. 2

- **ottaedro**: con la tracciatura delle mediane si determinano i baricentri delle singole facce (triangoli equilateri) che congiunti tre a tre generano l'esaedro, solido duale dell'ottaedro (► Fig. 3);
- **dodecaedro**: con l'individuazione delle mediane si determinano i baricentri delle singole facce (pentagoni) che congiunti cinque a cinque generano l'icosaedro, solido duale del dodecaedro (► Fig. 4);
- **icosaedro**: attraverso la tracciatura delle mediane si determinano i baricentri delle singole facce (triangoli equilateri) che congiunti tre a tre generano il dodecaedro, solido duale dell'icosaedro (► Fig. 5).

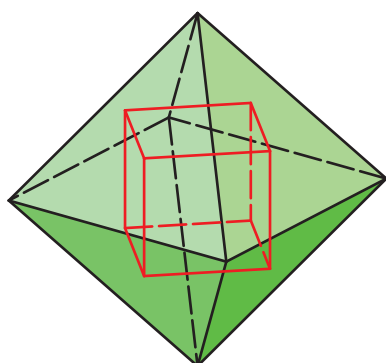


Fig. 3

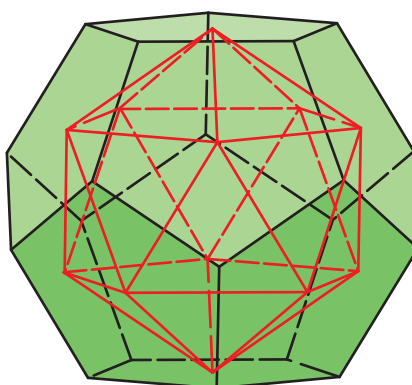


Fig. 4

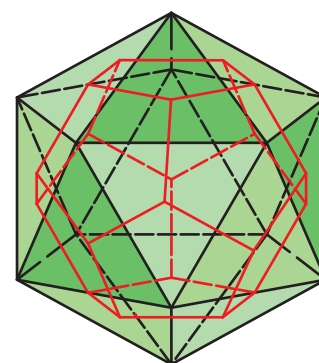


Fig. 5

2. Genesi degli altri solidi archimedei

Altri poliedri archimedei si generano troncando ulteriormente i solidi troncati appena visti.

- 1 Dal cubo troncato si ottiene il **cubottaedro**: il troncamento dei vertici è realizzato in modo tale da incrementare la superficie dei triangoli equilateri e contemporaneamente ridurre quella delle facce ottagonali, fino a far coincidere i vertici dei triangoli giacenti sullo stesso spigolo del solido. Le facce ottagonali si trasformano così in quadrate. La superficie laterale del cubottaedro è composta da 6 quadrati e 8 triangoli equilateri i cui lati sono tutti congruenti (► **Figg. 6-8**).

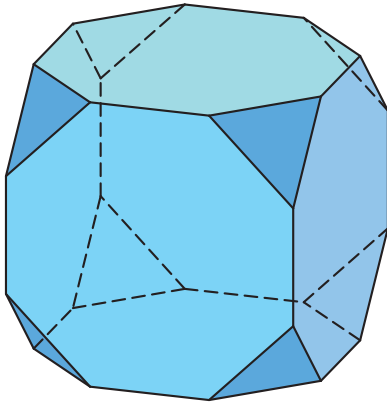


Fig. 6

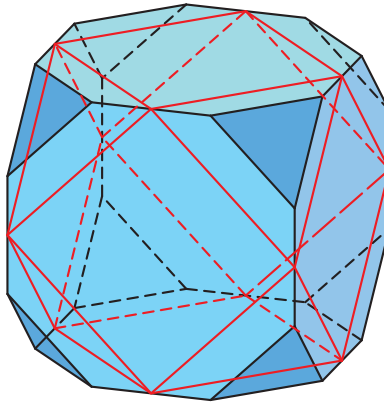


Fig. 7

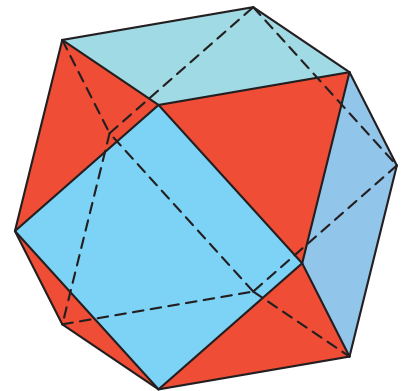


Fig. 8

- 2 Dal cubottaedro si ottiene il **cubottaedro troncato**: troncando i dodici vertici del cubottaedro in modo tale che le linee di taglio risultino congruenti alle rimanenti parti di spigolo, si ottengono dodici quadrati così le facce quadrate divengono ottagali mentre quelle triangolari si trasformano in esagonali. La superficie laterale del cubottaedro troncato è costituita da 12 quadrati, 8 esagoni e 6 ottagoni i cui lati risultano tutti congruenti (► **Figg. 9-11**).

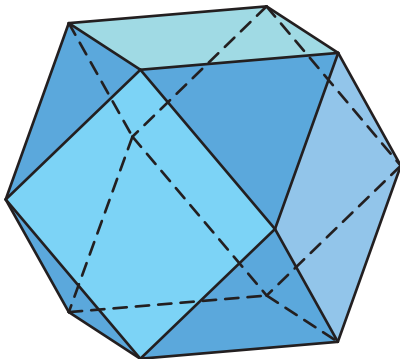


Fig. 9

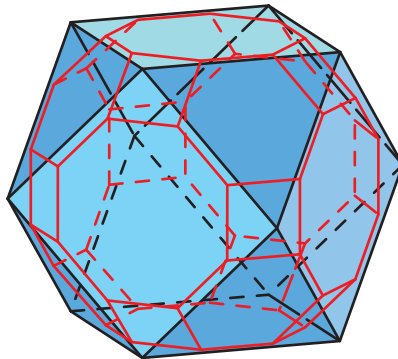


Fig. 10

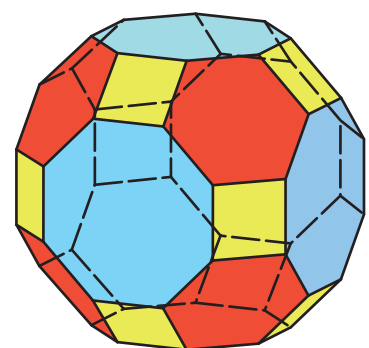


Fig. 11

- 3** Dal cubottaedro troncato si ottiene il **rombicubottaedro**: il troncamento dei vertici è realizzato in modo tale da incrementare la superficie dei quadrati e contemporaneamente ridurre quella delle facce esagonali e ottagonali, fino a far coincidere i vertici dei quadrati. Le facce ottagonali si trasformano così in quadrate e quelle esagonali in triangoli equilateri. La superficie laterale del romicubottaedro è composta da 18 quadrati e 8 triangoli equilateri i cui lati sono tutti congruenti (► **Figg. 12-14**).

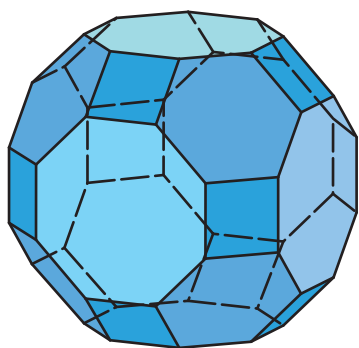


Fig. 12

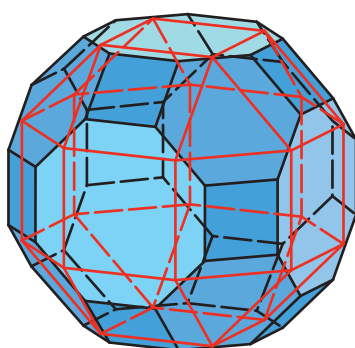


Fig. 13

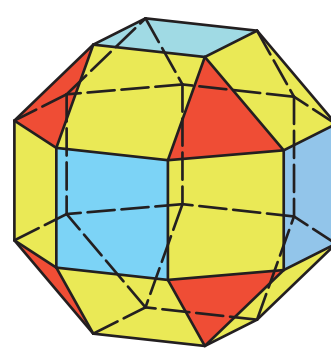


Fig. 14

- 4** Dal dodecaedro troncato all'**icosidodecaedro**: il troncamento dei vertici è realizzato in modo tale da incrementare la superficie dei triangoli equilateri e contemporaneamente ridurre quella delle facce decagonali, fino a far coincidere i vertici dei triangoli giacenti sullo stesso spigolo del solido. Le facce decagonali si trasformano così in pentagonali. La superficie laterale dell'icosidodecaedro è composta da 20 triangoli equilateri e 12 pentagoni i cui lati sono tutti congruenti (► **Figg. 15-17**).

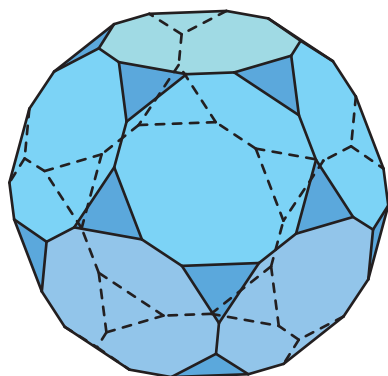


Fig. 15

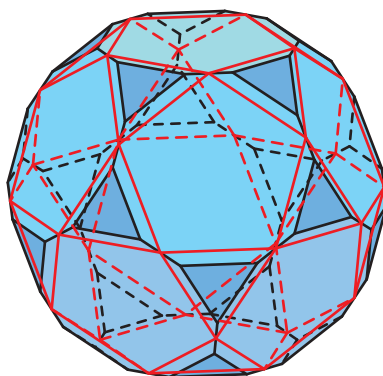


Fig. 16

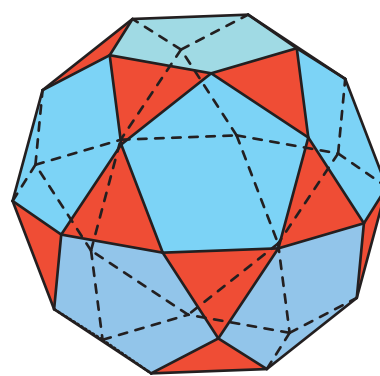


Fig. 17

Gli ultimi solidi archimedei sono i seguenti.

- **L'icosidodecaedro troncato**: ottenuto dal troncamento dei trenta vertici dell'icosidodecaedro in modo tale che le linee di taglio risultino congruenti alle rimanenti parti di spigolo, generando così trenta quadrati; le facce triangolari divengono esagonali mentre quelle pentagonali si trasformano in decagonali. Il solido ottenuto è composto da 30 quadrati, 20 esagoni e 12 decagoni i cui lati sono tutti congruenti.
- **Il rombicosidodecaedro**: ottenuto dal troncamento dei trenta vertici dell'icosidodecaedro troncato; i tagli sono realizzati in modo tale da aumentare la superficie dei quadrati fino a far coincidere i vertici dei quadrati giacenti sullo stesso spigolo del solido. Così le facce decagonali si trasformano in pentagonali e quelle esagonali in triangoli equilateri. Il solido ottenuto risulta composto da 30 quadrati, 20 triangoli equilateri e 12 pentagoni i cui lati sono tutti congruenti.
- **Il cubottaedro camuso** (cubosimo): ottenuto dal cubottaedro troncato, risulta costituito da 32 triangoli equilateri e 6 quadrati.
- **L'icosidodecaedro camuso**: ottenuto dall'icosidodecaedro troncato, risulta formato da 80 triangoli equilateri e 12 pentagoni.

Il termine camuso (dal gaelico *camus*, la cui radice *cam* significa "piegare") evidenzia che i poliedri sono ricavati da precedenti solidi non con un'operazione di troncamento di vertici ma di smussatura degli spigoli.

Questi due ultimi solidi sono detti anche **chirali** (asimmetrici): difatti la configurazione geometrica spaziale è tale da non renderli sovrapponibili alla loro immagine speculare (riflessa).

Tabella comparativa dei solidi archimedei

Le caratteristiche geometriche dei solidi archimedei possono essere riassunte in una tabella come quella sotto riportata.

Solido archimedeo		Facce	Vertici	Spigoli
Tetraedro troncato	8	4 triangoli equilateri, 4 esagoni	12	18
Cubo troncato	14	8 triangoli equilateri, 6 ottagoni	24	36
Ottaedro troncato	14	6 quadrati, 8 esagoni	24	36
Dodecaedro troncato	32	20 triangoli equilateri, 12 decagoni	60	90
Icosaedro troncato	32	12 pentagoni, 20 esagoni	60	90
Cubottaedro	14	6 quadrati, 8 triangoli equilateri	12	24
Cubottaedro troncato	26	12 quadrati, 8 esagoni, 6 ottagoni	48	72
Rombicubottaedro	26	18 quadrati, 8 triangoli equilateri	24	48
Icosidodecaedro	32	20 triangoli equilateri, 12 pentagoni	30	60
Icosidodecaedro troncato	62	30 quadrati, 20 esagoni, 12 decagoni	120	180
Rombicosidodecaedro	62	30 quadrati, 20 triangoli equilateri, 12 pentagoni	60	120
Cubottaedro camuso	38	32 triangoli equilateri, 6 quadrati	24	60
Icosidodecaedro camuso	92	80 triangoli equilateri, 12 pentagoni	60	150

3. Poliedri e realtà

I poliedri sono presenti nel mondo che ci circonda molto più di quanto si possa immaginare: difatti si possono riscontrare simmetrie platoniche o archimedee in organismi viventi, in reticoli cristallini, in molecole e perfino si possono individuare rapporti tra i poliedri e l'astronomia.

I poliedri in biologia

Potrebbe sembrare strano che forme geometriche così nette e definite, come quelle dei poliedri, possano estendersi anche agli organismi viventi ma, con l'ausilio di un microscopio, si possono osservare forme biologiche dalle geometrie complesse e al contempo meravigliose.

Per esempio i radiolari, microrganismi acquatici unicellulari abbastanza comuni che formano parte del plancton presente negli oceani, producono scheletri silicei con forme poliedriche.

Il biologo naturalista **Ernst Haeckel** (1834-1919) ha studiato questi microrganismi e ne ha riprodotto in alcuni disegni le caratteristiche geometriche degli scheletri nei quali si possono riconoscere facilmente le peculiari forme dei solidi platonici (► **Figg. 18, 19**).

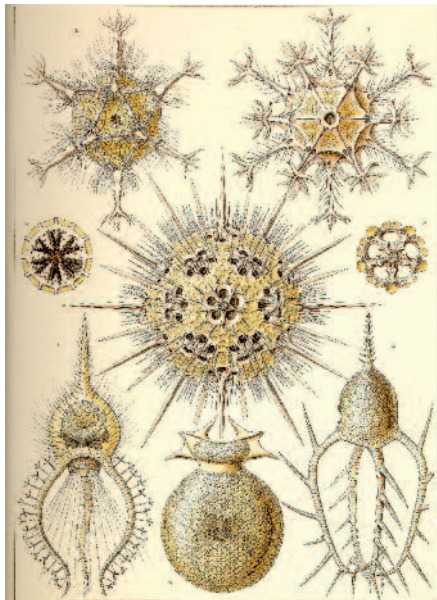


Fig. 18

Radiolari (Phaeodaria), tavola tratta dal volume *Le forme d'arte della Natura* di E. Haeckel (1904).

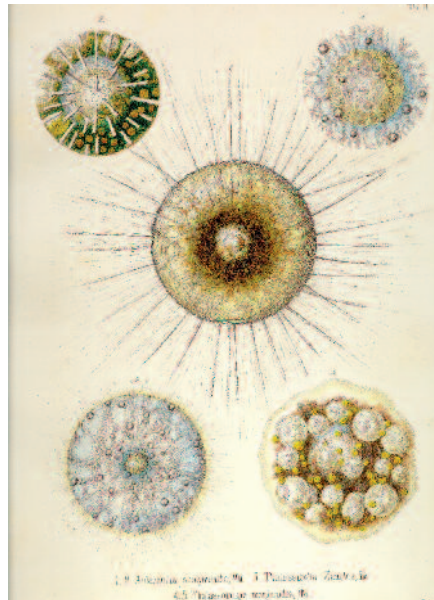


Fig. 19

Radiolari.

Anche le capsidi (rivestimenti proteici esterni) di alcuni virus presentano simmetrie platoniche riscontrabili; per esempio, in quelle dell'HIV, dell'HAV (epatite A) e degli adenovirus le cui forme possono essere ricondotte all'icosaedro (► **Figg. 20, 21**).

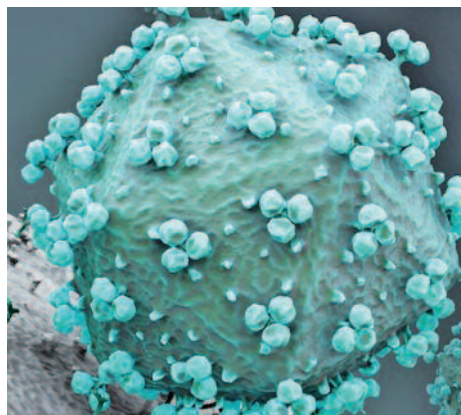


Fig. 20 Virus HIV.

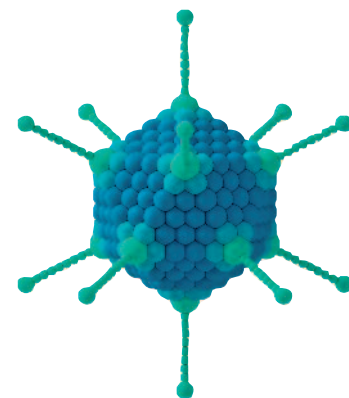


Fig. 21 Adenovirus.

I poliedri in chimica

Nel campo della chimica la geometria poliedrica è utile per descrivere la struttura delle molecole e dei reticoli.

Per esempio: il biossido di silicio (SiO_2) può formare reticoli con una geometria tetraedrica; il cloruro di sodio (NaCl) può avere un reticolo cubico; le macromolecole del carbonio, note come fullereni, hanno simmetria dodecaedrica; il famoso C_{60} ha la struttura reticolare di un icosaedro troncato (► **Figg. 22-24**).

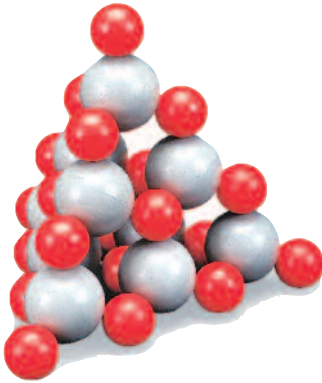


Fig. 22 SiO_2 .

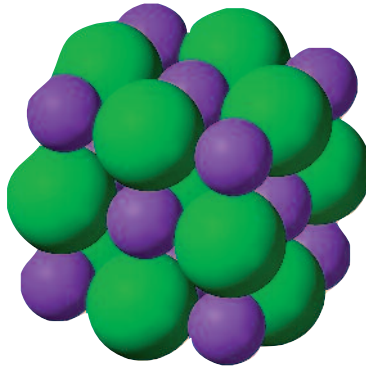


Fig. 23 NaCl .

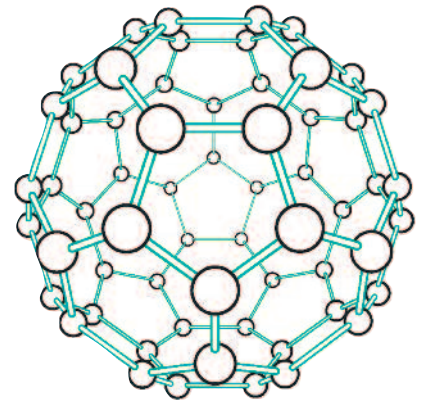


Fig. 24 C_{60} .

I poliedri in mineralogia

La classificazione dei cristalli è legata proprio alle simmetrie dei poliedri che ne rappresentano la struttura. La scienza che studia i cristalli è la cristallografia, che fonda le sue basi sulla geometria dei poliedri e sulle loro simmetrie (► **Figg. 25-29**).



Fig. 25 Fluorite (ottaedro).



Fig. 26 Pirite (dodecaedro).



Fig. 27 Pirite (cubo).



Fig. 28 Berillo (prisma retto esagonale).

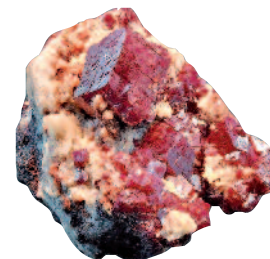


Fig. 29 Cuprite (ottaedro).

I poliedri in astronomia

Giovanni Keplero (1571-1630) studiò i poliedri individuandone due, il piccolo e il grande dodecaedro stellato, dando, allo stesso tempo, un prezioso contributo alla teoria matematica a essi riconducibile: si basò proprio sulle simmetrie dei poliedri per sostenere una sua singolare teoria astrale relativa alle orbite dei pianeti.

Keplero era convinto che l'universo fosse ordinato secondo un preciso piano matematico e nella sua opera *Mysterium Cosmographicum* (pubblicata nel 1596), per descrivere le orbite dei pianeti del sistema solare, si avvalse dei cinque solidi regolari: quelli platonici. A quell'epoca erano noti soltanto sei pianeti: Mercurio, Venere, Terra, Marte, Giove e Saturno. Keplero, per realizzare il suo modello di sistema solare, mise in relazione il raggio dell'orbita di ciascun pianeta intorno al Sole con lo spigolo di uno dei cinque poliedri regolari.

Così concepì la sua teoria tracciando una sfera, con al centro il Sole, il cui raggio coincideva con quello dell'orbita di Saturno, nella quale inscriveva un cubo e in questo un'altra sfera il cui raggio, secondo i suoi calcoli, coincideva esattamente con il raggio dell'orbita di Giove. Nella sfera di Giove inscriveva un tetraedro che a sua volta circoscriveva una sfera il cui raggio era proprio quello dell'orbita di Marte. Nella sfera di Marte inscriveva un dodecaedro, circoscritto alla sfera della Terra; quindi inscriveva nella sfera della Terra l'icosaedro che determinava la sfera di Venere. Infine nella sfera di Venere inscriveva l'ottaedro, circoscritto alla sfera di Mercurio. In questo modello la successione pianeta-poliedro era: Saturno, cubo, Giove, tetraedro, Marte, dodecaedro, Terra, icosaedro, Venere, ottaedro, Mercurio (► **Fig. 30**).

Keplero, nel corso degli anni, si rese conto che il suo modello planetario non era corretto in quanto non corrispondeva ai risultati dell'osservazione (le orbite dei pianeti non erano circolari ma ellittiche) e fu costretto ad abbandonare la sua particolare ipotesi.

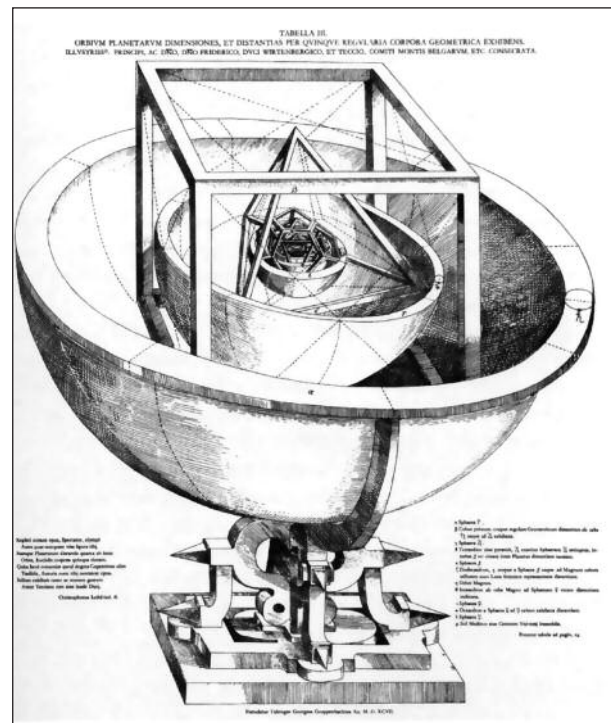


Fig. 30

Modello del sistema solare di Keplero.