

ESERCIZI SVOLTI

Argomenti:

A Momento d'inerzia assiale

B Momento d'inerzia polare

C Raggio giratore

A Esercizio 1

Calcolare il momento d'inerzia della seguente figura complessa, calcolato rispetto all'asse orizzontale baricentrico (misure in centimetri) (Figura 1).

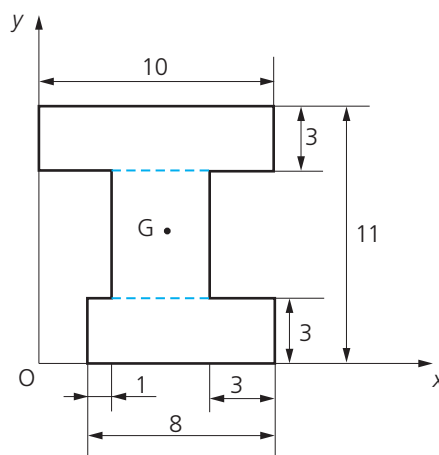


Figura 1

SOLUZIONE

Riferiamo la figura, che abbiamo suddiviso in tre rettangoli, a un sistema di assi cartesiani x, y . Appliciamo il teorema di Varignon per determinare l'ordinata y_G del baricentro della figura stessa. Otteniamo:

$$y_G = \frac{\sum a_i \cdot y_i}{A} = \frac{30 \cdot 9,5 + 20 \cdot 5,5 + 24 \cdot 1,5}{74} \approx 5,8 \text{ cm}$$

Calcoliamo ora il momento d'inerzia di ciascuno dei tre rettangoli: applichiamo il teorema di trasposizione, mediante il quale ricaviamo:

$$I_1 = \frac{10 \cdot 3^3}{12} + 30 \cdot (9,5 - 5,8)^2 = 433,2 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = \frac{4 \cdot 5^3}{12} + 20 \cdot (5,8 - 5,5)^2 = 43,47 \text{ cm}^4$$

$$I_3 = \frac{8 \cdot 3^3}{12} + 24 \cdot (5,8 - 1,5)^2 = 462 \text{ cm}^4$$

Il momento d'inerzia dell'intera figura è dato dalla somma dei tre momenti parziali e vale: $I \approx 938,7 \text{ cm}^4$.

B Esercizio 2

Determinare il momento d'inerzia polare di un rettangolo, di base $b = 3,2 \text{ cm}$ e altezza $h = 6 \text{ cm}$, calcolato rispetto al baricentro G e a un vertice V (Figura 2). Calcolare inoltre i raggi d'inerzia della figura rispetto agli assi baricentrici x e y e infine il momento d'inerzia rispetto a una retta r esterna verticale e distante 2 cm dalla figura.

SOLUZIONE

Calcoliamo i momenti d'inerzia del rettangolo rispetto ai due assi baricentrici; otteniamo:

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{3,2 \cdot 6^3}{12} = 57,6 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{6 \cdot 3,2^3}{12} = 16,38 \text{ cm}^4$$

Il momento d'inerzia polare I_G , calcolato rispetto al baricentro G vale:

$$I_G = I_x + I_y = 57,6 + 16,38 \approx 74 \text{ cm}^4$$

Per il calcolo del momento d'inerzia rispetto a un vertice V occorre conoscere il valore della distanza $d = GV$, avente lunghezza pari alla metà di una diagonale del rettangolo.

Si ha:

$$d = \sqrt{6^2 + 3,2^2} / 2 = 3,4 \text{ cm}$$

Con il teorema di trasposizione si ottiene:

$$I_V = I_G + A \cdot d^2 = 74 + 19,2 \cdot 3,4^2 \approx 296 \text{ cm}^4$$

Raggi d'inerzia della figura:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{57,6}{19,2}} = 1,73 \text{ cm}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{16,38}{19,2}} = 0,92 \text{ cm}$$

Momento d'inerzia assiale, calcolato rispetto alla retta r verticale:

$$I_r = I_y + A \cdot d^2 = 16,38 + 19,2 \cdot 3,4^2 \approx 238,3 \text{ cm}^4$$

C Esercizio 3

Determinare il valore del raggio giratore di un cono di massa m e raggio di base r .

SOLUZIONE

Dalla Tabella 1 dell'Approfondimento 11.10 recuperiamo il valore del momento d'inerzia assiale di massa J_z di un cono di massa m , avente raggio di base r . Esso vale:

$$J_z = \frac{3 \cdot m \cdot r^2}{10}$$

Il valore del raggio giratore ρ_z sarà perciò:

$$\rho_z = \sqrt{\frac{J_z}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot m \cdot r^2}{10 \cdot m}} = \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot r$$

Pertanto, se immaginiamo di concentrare tutta la massa del cilindro in un punto P posto a una distanza dall'asse z pari a

$$\rho_z = \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot r$$

il momento d'inerzia assiale di massa J_z del cilindro varrebbe esattamente:

$$J_z = \frac{3 \cdot m \cdot r^2}{10}$$

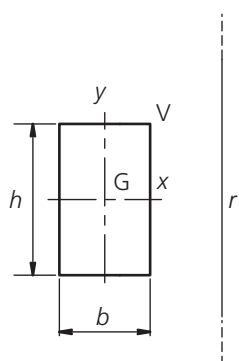


Figura 2