

## 1 Calcolo del rendimento

### di una puleggia fissa: $\eta = \frac{r - f \cdot r_1}{r + f \cdot r_1}$

Effettueremo il calcolo del rendimento di una puleggia fissa in modo graduale. Ovvero, dapprima calcoleremo la forza motrice teorica, cioè nell'ipotesi della mancanza di attriti e trascurando la rigidità della fune; successivamente, nel calcolo della forza motrice reale prenderemo in considerazione gli effetti della rigidità della fune e dell'attrito del perno esaminandoli all'inizio separatamente e, alla fine, congiuntamente. Infine, calcoleremo il rendimento della puleggia fissa considerando sia gli effetti della rigidità della fune sia quelli dell'attrito del perno.

### 1.1 Calcolo della forza motrice di una puleggia fissa

#### A) Ipotesi: mancanza di attriti e trascurando la rigidità della fune

Nell'ipotesi teorica di assoluta mancanza di attriti e supponendo inoltre di trascurare la rigidità della fune, dette  $F$  la forza motrice (in newton),  $Q$  la forza resistente (anch'essa misurata in newton) e  $r$  il raggio della puleggia (in m), dalla condizione di equilibrio alla rotazione attorno al centro  $O$  della puleggia e nell'ipotesi che le rotazioni in senso orario siano positive, si ricava:

$$-Q \cdot r + F \cdot r = 0$$

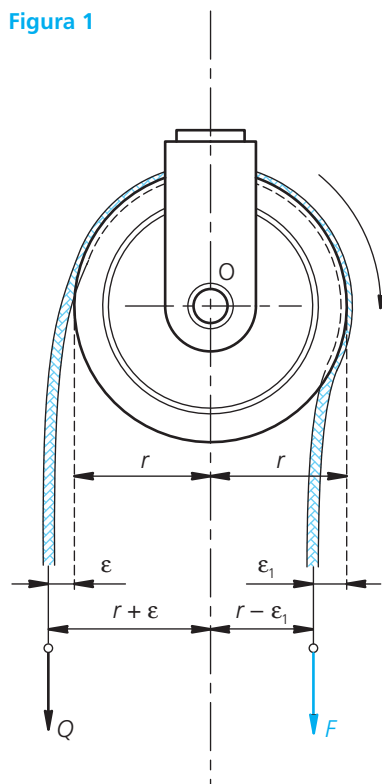
e, semplificando:

$$F = Q$$

In linea teorica, la forza motrice  $F$  quindi deve essere almeno pari alla forza resistente  $Q$ , il che significa che la puleggia fissa non offre alcun vantaggio effettivo. Infatti risulta:

$$k = \frac{Q}{F} = 1$$

Figura 1



dove con  $k$  si è indicato il vantaggio.

La puleggia fissa viene impiegata, come s'è già detto, al solo scopo di modificare la retta d'azione e il verso della forza  $F$ .

### 1.2 Effetti della rigidità della fune e dell'attrito nel perno

Trascurando gli effetti della resistenza dell'aria in virtù della bassa velocità di salita del carico, consideriamo ora le conseguenze sia della *rigidità della fune* che si avvolge attorno alla puleggia, sia dell'*attrito nel perno* sul quale è calettata la puleggia stessa.

#### B1) Ipotesi: considerando gli effetti della sola rigidità della fune

Qualsiasi fune oppone una certa rigidità all'azione di piegamento cui essa è costretta per seguire la curvatura della puleggia sulla quale deve avvolgersi per un certo tratto.

Con riferimento alla **Figura 1**, il tratto di fune al quale è applicato il carico  $Q$  nel suo movimento di salita non si adagia perfettamente sulla puleggia ma, per effetto della propria rigidità, si piega con gradualità; di conseguenza, la fune rimane, sia pur di poco, distante dalla carucola. In figura tale scostamento è stato indicato con  $\varepsilon$ .

Analogamente, il tratto di fune cui è applicata la forza motrice  $F$  e che si era piegato adattandosi alla curvatura della puleggia, nel distaccarsi dalla carrucola tende ora a raddrizzarsi con un certo ritardo. Di conseguenza, la fune resta lontana dalla posizione che teoricamente dovrebbe assumere, di una quantità, anch'essa molto ridotta, indicata in figura con la lettera  $\varepsilon_1$ .

Gli scostamenti  $\varepsilon$  e  $\varepsilon_1$  modificano la condizione teorica di equilibrio della puleggia. Infatti ora dalla condizione di equilibrio alla rotazione attorno al centro  $O$  della puleggia, nell'ipotesi che le rotazioni in senso orario siano positive, si ottiene l'equazione:

$$-Q \cdot (r + \varepsilon) + F \cdot (r - \varepsilon_1) = 0$$

da cui si ricava:

$$F = Q \cdot \frac{r + \varepsilon}{r - \varepsilon_1}$$

Tale risultato è maggiore, sia pur leggermente, di quello ricavato supponendo nulla la rigidità della fune, cioè:

$$F = Q$$

Le entità degli scostamenti  $\varepsilon$  ed  $\varepsilon_1$  dipendono sia dal materiale di cui è costituita la fune, sia dal suo diametro, sia dal diametro della puleggia e dall'entità del carico  $Q$  da sollevare.

## B2) Ipotesi: considerando solo gli effetti dell'attrito del perno

Nel moto di salita del carico  $Q$ , il perno sviluppa una resistenza di attrito  $R$  disposta tangenzialmente ad esso, con verso tale da opporsi alla rotazione della puleggia. Tale resistenza dipende dall'entità della forza complessiva  $N$  agente sul perno.

Se sia il tratto di fune cui è applicata la forza motrice  $F$ , sia quello al quale è sospeso il peso  $Q$  sono verticali, lo sforzo complessivo  $N$  agente sul perno della puleggia vale:

$$N = Q + F + P$$

dove con  $P$  si è indicato il peso della puleggia.

La resistenza d'attrito  $R$  sviluppata dal perno vale perciò:

$$R = f \cdot N$$

dove  $f$  è il coefficiente dell'attrito radente che si instaura tra il perno e la puleggia.

Risulta:

$$R = f \cdot (Q + F + P)$$

Con riferimento alla **Figura 2**, dove si è indicato con  $r_1$  il raggio del perno, applichiamo la condizione di equilibrio alla rotazione attorno all'asse del perno. Nell'ipotesi che le rotazioni in senso orario siano positive, si ha:

$$F \cdot r - Q \cdot r - R \cdot r_1 = 0$$

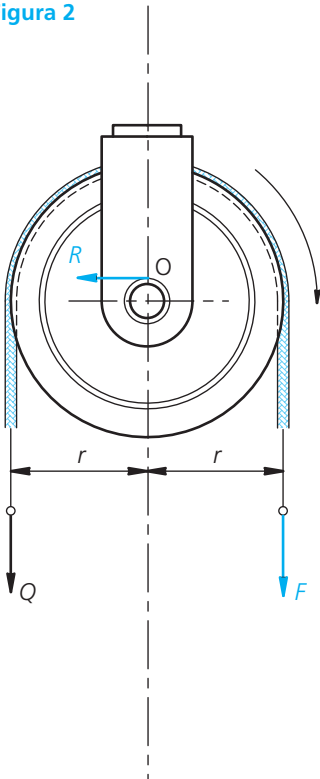
cioè:

$$F \cdot r - Q \cdot r - f \cdot (Q + F + P) \cdot r_1 = 0$$

Se separiamo i termini contenenti  $F$ , otteniamo:

$$F \cdot r - f \cdot r_1 \cdot F = Q \cdot r + f \cdot (Q + P) \cdot r_1$$

Figura 2



e successivamente se raccogliamo  $F$  a fattor comune, si ha:

$$F \cdot (r - f \cdot r_1) = Q \cdot r + f \cdot r_1 (Q + P)$$

Risulta infine:

$$F = \frac{Q \cdot r + f \cdot r_1 \cdot (Q + P)}{r - f \cdot r_1}$$

### B3) Ipotesi: considerando sia gli effetti della rigidità della fune sia l'attrito del perno

Nell'ipotesi di considerare sia gli effetti della rigidità della fune, sia l'attrito del perno, l'equilibrio alla rotazione attorno all'asse del perno, nell'ipotesi che le rotazioni in senso orario siano positive, diviene:

$$-Q \cdot (r + \varepsilon) + F \cdot (r - \varepsilon_1) - f \cdot (Q + F + P) \cdot r_1 = 0$$

Se separiamo i termini contenenti  $F$ , otteniamo:

$$F \cdot (r - \varepsilon_1) - f \cdot r_1 \cdot F = Q \cdot (r + \varepsilon) + f \cdot (Q + P) \cdot r_1$$

e successivamente se raccogliamo  $F$  a fattor comune, si ha:

$$F \cdot (r - \varepsilon_1 - f \cdot r_1) = Q \cdot (r + \varepsilon) + f \cdot (Q + P) \cdot r_1$$

Risulta infine:

$$F = \frac{Q \cdot (r + \varepsilon) + f \cdot r_1 \cdot (Q + P)}{r - \varepsilon_1 - f \cdot r_1}$$

## 1.3 Calcolo del rendimento complessivo di una puleggia fissa

Il rendimento  $\eta$  di una macchina semplice può essere calcolato come il rapporto tra la forza motrice teorica (o ideale)  $F_{\text{ideale}}$  e la forza motrice reale (o effettiva)  $F$ , cioè:

$$\eta = \frac{F_{\text{ideale}}}{F}$$

Per quanto riguarda la puleggia fissa, la forza motrice ideale è:

$$F_{\text{ideale}} = Q$$

e la forza motrice reale si ricava dall'espressione:

$$F = \frac{Q \cdot (r + \varepsilon) + f \cdot r_1 \cdot (Q + P)}{r - \varepsilon_1 - f \cdot r_1}$$

Di conseguenza, se si tiene conto sia della rigidità della fune sia dell'attrito del perno, il rendimento vale:

$$\eta = \frac{Q}{\frac{Q \cdot (r + \varepsilon) + f \cdot r_1 \cdot (Q + P)}{r - \varepsilon_1 - f \cdot r_1}}$$

o anche, dopo opportune semplificazioni:

$$\eta = \frac{r - \varepsilon_1 - f \cdot r_1}{(r + \varepsilon) + f \cdot r_1 \cdot (1 + P/Q)}$$

Se non si considera la rigidità delle funi, si dovrà porre nella precedente relazione uguali a zero sia  $\varepsilon$  sia  $\varepsilon_1$ . Se inoltre si ritiene trascurabile il peso  $P$  della puleggia rispetto all'entità del carico sollevato  $Q$ , si dovrà attribuire il valore zero al rapporto  $P/Q$ . L'espressione del rendimento della carrucola fissa diviene allora:

$$\eta = \frac{r - f \cdot r_1}{r + f \cdot r_1}$$