

Procedimento di calcolo dell'equazione della parabola relativa al moto di un proiettile nel vuoto

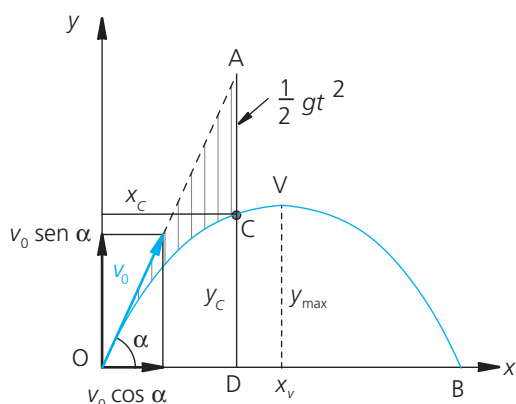


Figura 1

Vogliamo calcolare ora l'equazione della traiettoria descritta nel vuoto da un proiettile che ha velocità iniziale v_0 . Assunto come sistema di riferimento un sistema di assi cartesiani x, y , si scompone la velocità di lancio v_0 nella componente orizzontale $v_0 \cos \alpha$ e in quella verticale $v_0 \sin \alpha$.

Se il grave fosse dotato di solo moto uniforme, dopo un certo tempo t esso si troverebbe nel punto A dopo avere percorso lo spazio $OA = v_0 \cdot t$, ma per effetto della gravità si trova invece nel punto C le cui coordinate sono:

$$x_C = OD = OA \cdot \cos \alpha = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha$$

$$y_C = CD = AD - AC = OA \cdot \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

dove il termine $\frac{g \cdot t^2}{2}$ corrisponde alla quota persa AC (Figura 1).

Le coordinate del punto C rappresentano le componenti orizzontale e verticale degli spostamenti del corpo mobile espresse dalle equazioni parametriche:

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha \quad y = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Se ricaviamo dalla prima equazione il tempo t :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

e lo sostituiamo nella seconda, otteniamo:

$$y = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} \right) - g \cdot \frac{x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} = v_0 \cdot \tan \alpha \cdot \left(\frac{x}{v_0} \right) - g \cdot \frac{x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}$$

da cui:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} x^2 + x \cdot \tan \alpha$$

che è l'equazione della traiettoria parabolica di un proiettile nel vuoto.

Se si pone a sistema l'equazione della parabola e quella dell'asse x ($y = 0$) si trova l'ascissa x_0 del punto di lancio O (ovvero $x_0 = 0$) e quella x_B del punto di arrivo B, cioè:

$$x_B = \frac{v_0^2 \cdot \sin (2\alpha)}{g}$$

Risulta infatti, se si pone $y = 0$:

$$-\frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + x \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0$$

ossia:

$$x \cdot \left(\frac{g \cdot x}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) = 0$$

Una soluzione di questa equazione è $x = 0$ che, come si è anticipato, è l'ascissa del punto iniziale O.

La seconda soluzione è data da:

$$-\frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + x \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0$$

da cui si ricava:

$$x = \frac{2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot v_0^2}{g}$$

In base all'espressione: $2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin (2\alpha)$

risulta:

$$x = \frac{v_0^2 \cdot \sin (2\alpha)}{g}$$

che è l'ascissa del punto finale B.

La distanza OB tra i due punti, cioè in pratica il valore di x_B , viene detta *gittata*; essa dipende dal quadrato della velocità iniziale v_0 e dall'angolo d'inclinazione α . Dalla formula di x_B si vede che per $v_0 = \text{costante}$, la gittata assume il valore massimo quando $\sin 2\alpha = 1$, cioè per $\alpha = 45^\circ$.

In tali condizioni la *gittata massima* x_{\max} vale:

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

Dopo il lancio il corpo raggiunge l'*altezza massima* y_{\max} nel vertice V della parabola e quindi in corrispondenza dell'ascissa:

$$x_V = \frac{v_0^2 \cdot \sin (2\alpha)}{2g}$$

uguale alla metà della gittata. Se sostituiamo questo valore nell'equazione della traiettoria parabolica ricaviamo l'altezza massima:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}$$

Risulta infatti:

$$y_{\max} = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot \frac{v_0^4 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{g^2} + \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2 \cdot g} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

da cui:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g} + \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}$$

Per $\alpha = 45^\circ$, cioè in condizioni di gittata massima, l'altezza massima raggiunta dal corpo vale perciò:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{4g}$$

Risulta infatti:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 45^\circ}{2g} = \frac{v_0^2 \cdot \frac{1}{2}}{2g} = \frac{v_0^2}{4g}$$

dato che è: $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

e:

$$(\sin 45^\circ)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

Per quanto riguarda le velocità, la velocità complessiva v_{totale} di questo moto, per effetto dell'accelerazione di gravità, inizialmente diminuisce. Ciò avviene nella fase di salita da O a V, cioè man mano che il proiettile si avvicina, nella sua traiettoria di salita, al vertice V della parabola.

In corrispondenza di V il vettore velocità v_{totale} risulta orizzontale, dal momento che esso è tangente alla parabola nel suo vertice, e raggiunge, in modulo, il valore minimo:

$$v_{\text{totale min}} = v_0 \cdot \cos \alpha$$

coincidente con la componente orizzontale della velocità di lancio v_0 . Infatti, in V, la componente verticale di v_0 , cioè $v_0 \sin \alpha$, risulta uguale e opposta al vettore velocità $g \cdot t$.

Successivamente, cioè quando il proiettile ha superato il punto di massima altezza ed entra nella fase di ricaduta, v_{totale} aumenta fino a raggiungere, in modulo, nel punto B il valore v_0 che aveva in partenza. Si ricordi che vale sempre l'ipotesi iniziale, cioè che il lancio del proiettile avvenga nel vuoto.