

1 Caratteristiche del moto dei corpi in rotazione rispetto a un asse

1.1 Raggi d'inerzia (o raggi giratori)

Il teorema di trasposizione, espresso dalla relazione:

$$I_r = A \cdot d^2 + I_x$$

poteva anche essere enunciato affermando che:

Il momento d'inerzia assiale I_r , calcolato rispetto a una retta r non baricentrica, è uguale alla somma del momento d'inerzia, calcolato rispetto alla stessa retta r (e cioè $A \cdot d^2$) che avrebbe l'area A se fosse concentrata nel baricentro, più il momento d'inerzia I_x calcolato rispetto all'asse baricentrico.

Il momento d'inerzia assiale I_r , calcolato rispetto a una retta r è definito tramite l'espressione:

$$I_r = \sum_i (a_i \cdot y_i^2) \quad (1)$$

Se, anziché riferirlo a una retta r , è riferito agli assi x , y di un riferimento cartesiano ortogonale, si avrebbe:

$$I_x = \sum_i (a_i \cdot y_i^2)$$

$$I_y = \sum_i (a_i \cdot x_i^2)$$

Supponiamo ora che l'area A sia concentrata in un punto, situato a distanza ρ_x dall'asse x in modo che sia:

$$I_x = A \cdot \rho_x^2 \quad (2)$$

e a distanza ρ_y dall'asse y in modo da ottenere lo stesso momento d'inerzia assiale:

$$I_y = A \cdot \rho_y^2 \quad (3)$$

Le grandezze ρ_x e ρ_y che compaiono nelle espressioni (2) e (3) prendono il nome di *raggi d'inerzia assiali* di superficie o *raggi giratori assiali* di superficie.

Il raggio d'inerzia assiale è la distanza da un asse (x o y) di un punto nel quale si deve pensare che sia concentrata tutta l'area A della superficie in esame affinché si ottenga lo stesso valore del momento d'inerzia assiale, ovvero, una distanza tale per cui siano verificate le uguaglianze:

$$I_x = \sum_i (a_i \cdot y_i^2) = A \cdot \rho_x^2$$

se ci si riferisce all'asse x , o:

$$I_y = \sum_i (a_i \cdot x_i^2) = A \cdot \rho_y^2$$

se ci si riferisce all'asse y .

Dalle relazioni (2) e (3) si ricavano le espressioni analitiche dei raggi d'inerzia assiali della superficie di area A , calcolati rispetto alle rette x e y complanari alla suddetta superficie:

$$\rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad \rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Si definisce *raggio d'inerzia polare di superficie* o *raggio giratore polare* di superficie la distanza ρ_P tra il polo P e un punto P', nel quale si ipotizza sia concentrata tutta l'area A della superficie in esame, tale per cui sia verificata l'uguaglianza:

$$I_P = \sum_i (a_i \cdot z_i^2) = A \cdot \rho_P^2$$

Dalla precedente relazione si ricava l'espressione analitica del raggio d'inerzia polare della superficie di area A , calcolato rispetto al punto P ad essa complanare:

$$\rho_P = \sqrt{\frac{I_P}{A}}$$

L'utilizzazione dei raggi d'inerzia (assiali e polari) di superficie assume una notevole importanza nel calcolo delle travi soggette a flessione.

Il *teorema di trasposizione* (Figura 1), applicato ai momenti d'inerzia polari di superficie, è espresso dalla relazione:

$$I_P = I_G + A \cdot d^2$$

dove:

I_P = momento d'inerzia polare calcolato rispetto al polo P;

I_G = momento d'inerzia polare calcolato rispetto al baricentro G di una superficie piana di area A ;

d = distanza tra P e G.

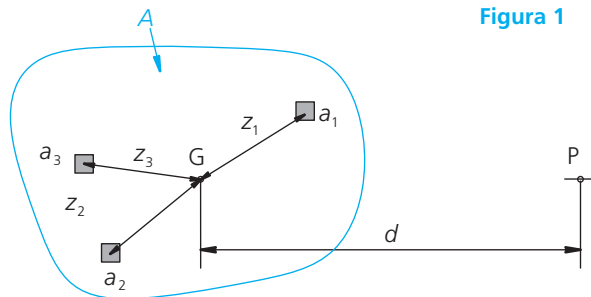


Figura 1

1.2 Momento centrifugo (o prodotto d'inerzia)

Si chiama *momento centrifugo* (o *prodotto d'inerzia*) I_{xy} di una superficie, calcolato rispetto a due rette qualsiasi x e y , la somma dei prodotti delle singole aree elementari a_i di cui si può pensare sia costituita la superficie, per le relative distanze x_i e y_i dalle due rette considerate (Figura 2).

Analiticamente:

$$I_{xy} = \sum_i (a_i \cdot x_i \cdot y_i)$$

Anche il momento centrifugo, come tutti i momenti d'inerzia di superficie, ha le dimensioni di una lunghezza alla quarta. Esso può assumere valori positivi, negativi o nulli a seconda dei segni assunti dalle varie distanze delle aree elementari dalle due rette assegnate.

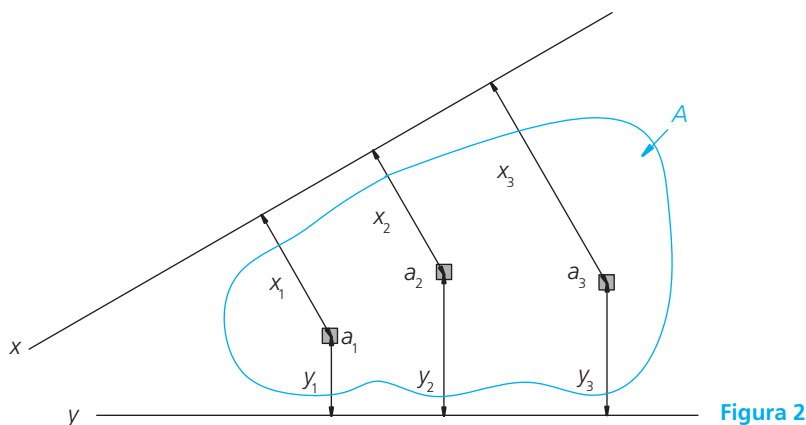


Figura 2

Il teorema di trasposizione può essere applicato anche al momento d'inerzia centrifugo. In questo caso tale teorema assume analiticamente la forma:

$$I_{xy} = I_{x'y'} + A \cdot d_x \cdot d_y$$

dove:

$I_{x'y'}$ rappresenta il momento d'inerzia centrifugo dell'area A calcolato rispetto al sistema d'assi baricentrico x', y' ;

I_{xy} è il momento d'inerzia centrifugo dell'area A calcolato rispetto al sistema d'assi x, y (parallelo al sistema x', y');

d_y è la distanza tra le rette y e y' ;

d_x è la distanza tra le rette x e x' .

Gli assi principali d'inerzia di una superficie

Fra tutte le coppie di assi x, y con origine nel baricentro G di una generica superficie piana, ne esiste una per la quale il momento d'inerzia assiale calcolato rispetto a un asse I_x è minimo, il momento d'inerzia assiale calcolato rispetto all'altro asse I_y è massimo e il momento centrifugo calcolato rispetto ai due assi I_{xy} è nullo. Per quella particolare coppia di assi si ha cioè:

$$I_x = I_{\min}$$

$$I_y = I_{\max}$$

$$I_{xy} = 0$$

Gli assi x e y per cui ciò si verifica sono denominati *assi principali d'inerzia della superficie*.

Gli assi principali d'inerzia, se sono assi baricentrici, vengono definiti *assi centrali d'inerzia*.

I *momenti principali d'inerzia* sono i momenti d'inerzia calcolati rispetto ai due assi principali d'inerzia. Possono essere ricavati dall'espressione:

$$I_{\max}, I_{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

1.3 Momenti statici di massa e momenti d'inerzia di massa

Se si considera un generico corpo solido come un insieme di un numero elevatissimo di masse elementari m_i , ciascuna delle quali si trova a una certa distanza y_i da una retta r prefissata, si definisce *momento statico di massa* di

quel corpo, calcolato rispetto alla retta r , la somma dei prodotti di ciascuna massa elementare m_i per la relativa distanza y_i dalla retta considerata; tale distanza è misurata a partire dal centro G_i di ciascuna massa elementare. Analiticamente:

$$S_r = \sum_i (m_i \cdot y_i)$$

Il momento statico di massa si misura in $\text{kg} \cdot \text{m}$.

Teorema di Varignon

Indicando con m la massa complessiva del corpo rigido e con d la distanza del suo baricentro dalla retta r , il *teorema di Varignon* viene espresso dalla relazione:

$$\sum_i (m_i \cdot y_i) = m \cdot d$$

Momento d'inerzia assiale di massa

Per quanto riguarda il *momento d'inerzia assiale di massa* di un corpo, calcolato rispetto a una retta r prefissata, esso vale la somma dei prodotti delle singole masse elementari m_i per i quadrati delle distanze y_i di ciascuna di esse dalla retta considerata. Indicando con J_r tale grandezza, essa viene espressa analiticamente dalla relazione:

$$J_r = \sum_i (m_i \cdot y_i^2)$$

Teorema di trasposizione

In perfetta analogia con quanto s'è detto per i momenti d'inerzia assiali di superficie, anche per i momenti d'inerzia assiali di massa vale il *teorema di trasposizione*, per il quale si può affermare che il momento quadratico J_r di un corpo di massa m , calcolato rispetto a una retta r qualsiasi ma parallela all'asse baricentrico x del corpo, è dato dalla somma del momento d'inerzia di massa J_x , calcolato rispetto all'asse baricentrico x , più il prodotto della massa m per il quadrato della distanza d tra i due assi.

Analiticamente:

$$J_r = J_x + m \cdot d^2$$

Momento d'inerzia polare di massa

Il *momento d'inerzia polare di massa* J_P di un corpo rigido, calcolato rispetto a un punto P , vale la somma dei prodotti delle masse elementari m_i per i quadrati delle rispettive distanze z_i dal polo P .

Analiticamente:

$$J_P = \sum_i (m_i \cdot z_i^2)$$

Come per i momenti d'inerzia polare di superficie, anche per i momenti d'inerzia polare di massa vige l'espressione:

$$J_P = J_y + J_x$$

dove con J_P si è indicato il momento d'inerzia polare di massa del corpo in esame calcolato rispetto al punto P , punto d'incontro di due rette x e y tra loro perpendicolari, e con J_y e J_x i momenti d'inerzia assiali di massa del corpo calcolati rispetto alle rette x e y .

I momenti d'inerzia di massa si misurano, nel S.I., in $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

Raggio d'inerzia

Il *raggio d'inerzia* ρ viene definito tramite l'espressione:

$$\rho = \sqrt{\frac{J}{m}}$$

dove:

m = massa complessiva del corpo rigido in esame

e

J = momento d'inerzia assiale di massa del corpo stesso, calcolato rispetto al suo asse di rotazione.

FACCIAMO IL PUNTO

RAGGI D'INERZIA

Raggi d'inerzia assiali (o giroatori assiali)

considerando l'area A della superficie in esame concentrata in un punto, i raggi d'inerzia assiali ρ_x, ρ_y costituiscono la distanza fittizia di quel punto dagli assi di un sistema di riferimento x, y tali da ottenere lo stesso valore del momento d'inerzia assiale, ovvero, siano verificate le uguaglianze:

$$I_x = \sum_i (a_i \cdot y_i^2) = A \cdot \rho_x^2 \text{ per cui: } \rho_x = \sqrt{I_x/A}; \quad I_y = \sum_i (a_i \cdot x_i^2) = A \cdot \rho_y^2 \text{ per cui: } \rho_y = \sqrt{I_y/A}$$

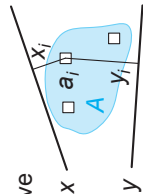
Raggi d'inerzia polari

in modo analogo a quelli assiali, deve risultare:

$$I_p = \sum_i (a_i \cdot z_i^2) = A \cdot \rho_p^2 \text{ da cui: } \rho_p = \sqrt{I_p/A}$$

Il **momento centrifugo** I_{xy} di una superficie piana calcolato rispetto a due generiche rette x, y è la somma dei prodotti delle aree elementari a_i , per le relative distanze x_i e y_i dalle due rette considerate:

$$I_{xy} = \sum_i (a_i \cdot x_i \cdot y_i)$$



Assi principali d'inerzia di una superficie: coppia di assi x, y con origine nel baricentro G , tali che il momento d'inerzia assiale calcolato rispetto a un asse (I_x) è minimo, quello calcolato rispetto all'altro asse (I_y) è massimo e il momento centrifugo calcolato rispetto ai due assi (I_{xy}) è nullo: $I_x = I_{\min}$; $I_y = I_{\max}$; $I_{xy} = 0$

Momenti principali d'inerzia: momenti d'inerzia calcolati rispetto ai due assi principali d'inerzia

$$I_{\max}, I_{\min} = \frac{I_x - I_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(I_x - I_y)^2}{4} + I_{xy}^2}$$

momento centrifugo
(prodotto d'inerzia)

MOMENTI STATICI E MOMENTI D'INERZIA DI MASSA

Si consideri un corpo solido m composto da un insieme di masse elementari m_i a una distanza y_i da una retta r .
Il **momento statico di massa** S_r della massa M calcolato rispetto alla retta r vale: $S_r = \sum_i (m_i \cdot y_i)$ [kg · m]
La distanza y_i è misurata a partire dal centro G_i di ciascuna massa

facendo riferimento a un corpo solido di massa m , scomponibile in masse elementari m_i

Teorema di Varignon: le masse m_i abbiano ciascuna distanza y_i dalla retta r . Il momento d'inerzia assiale J_r del corpo calcolato rispetto alla retta vale:

$$J_r = \sum_i (m_i \cdot y_i^2)$$

Teorema di trasposizione: il momento assiale di massa J_r di un corpo di massa m , calcolato rispetto a una retta r parallela all'asse baricentrico del corpo x , risulta dalla somma del momento d'inerzia di massa J_x , calcolato rispetto all'asse baricentrico x , con il prodotto della massa m per il quadrato della distanza d tra i due assi:

$$J_r = m \cdot d^2 + J_x$$

Momento d'inerzia polare di massa: il momento J_p calcolato rispetto a un punto P è dato da:

$$J_p = \sum_i (m_i \cdot z_i^2)$$

essendo z_i le distanze delle singole masse m_i dal polo P . Risulta poi: $J_p = J_x + J_y$ se P è il punto d'incontro di due rette x e y tra loro perpendicolari e J_y e J_x sono i momenti d'inerzia assiali di massa calcolati rispetto ad esse

Raggio d'inerzia: per un corpo di massa m risulta:

$$\rho = \sqrt{\frac{J}{m}}$$

con J = momento d'inerzia assiale del corpo, calcolato rispetto al suo asse di rotazione