

1 Calcolo dei momenti d'inerzia di figure geometriche semplici

Nelle applicazioni pratiche i momenti d'inerzia non possono essere calcolati con le formule generali viste nel Paragrafo 11.1 del primo volume, ma occorre seguire metodi approssimati che danno ugualmente risultati accettabili, oppure utilizzare rigorosi procedimenti di integrazione se si dispone delle necessarie conoscenze matematiche.

Come esempio di metodo approssimato determiniamo ora il momento d'inerzia assiale baricentrico di un rettangolo.

1. Calcolo del momento d'inerzia assiale baricentrico di un rettangolo

Il rettangolo abbia base b e altezza h ; l'asse baricentrico sia l'asse x , orizzontale e parallelo alla base b (Figura 1).

Scriviamo la formula generale del momento d'inerzia nella forma:

$$I = \sum a_i \cdot y_i^2 = \sum a_i \cdot y_i \cdot y_i$$

dove con y_i si sono indicate le distanze delle singole aree elementari dalla retta baricentrica. Se applichiamo l'espressione:

$$\sum a_i \cdot y_i = S_i$$

dove con S_i si è indicato il momento statico di ciascuna area elementare rispetto all'asse baricentrico, il momento d'inerzia diventa:

$$I = \sum S_i \cdot y_i$$

Suddivisa allora la superficie del rettangolo in strisce orizzontali di altezza unitaria e aventi quindi un'area $a_i = b \cdot 1$, ogni striscia ha un momento statico:

$$S_i = b \cdot 1 \cdot y_i = b \cdot y_i$$

che, dato che è $b = \text{cost.}$, è proporzionale alla propria distanza y_i dall'asse x baricentrico (Figura 1a).

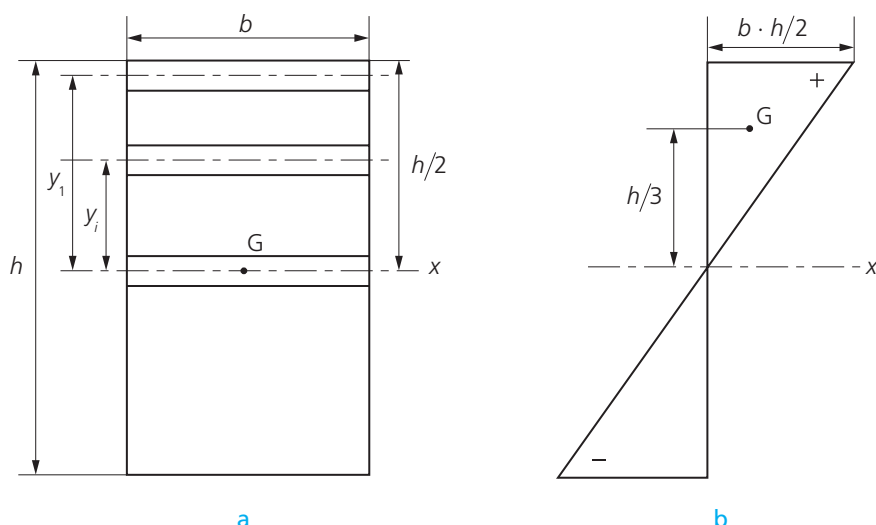


Figura 1

a

b

In particolare la prima striscia ha un momento statico:

$$S_1 = b \cdot 1 \cdot \frac{h}{2} = b \cdot \frac{h}{2}$$

mentre la striscia centrale ha un momento statico nullo essendo nulla la distanza del suo baricentro dall'asse x .

Si può allora rappresentare il diagramma dei momenti statici mediante un doppio triangolo rettangolo (Figura 1b) in cui le distanze y delle strisce poste sopra l'asse x sono positive e le distanze delle strisce poste sotto l'asse x sono negative.

Ogni striscia elementare di questo diagramma triangolare rappresenta il momento statico della corrispondente striscia del rettangolo, per cui l'area totale del diagramma corrisponde alla somma dei momenti statici delle strisce elementari del rettangolo.

Per calcolare il momento d'inerzia della metà superiore del rettangolo con la generica relazione $I = \sum S_i \cdot y_i^2$ si dovrebbe suddividere anche il diagramma triangolare in strisce elementari e valutare con precisione, se fosse possibile, le varie distanze y_i dall'asse x . Risulta allora assai più conveniente l'applicazione del teorema di Varignon al diagramma triangolare. Si procede quindi nel modo seguente:

a) si calcola dapprima l'area A_1 del triangolo superiore.

$$\text{Risulta: } A_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{b \cdot h^2}{8}$$

b) Successivamente si determina la distanza y_G del baricentro del suddetto triangolo dall'asse x :

$$y_G = \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{3}$$

c) A questo punto, il momento d'inerzia della metà superiore del rettangolo diviene:

$$\frac{I_x}{2} = A_1 \cdot y_G^2 = \frac{b \cdot h^2}{8} \cdot \frac{h}{3} = \frac{b \cdot h^3}{24}$$

d) Di conseguenza il momento d'inerzia I_x dell'intero rettangolo vale:

$$I_x = 2 \cdot \frac{b \cdot h^3}{24} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Con procedimento analogo a quello visto per determinare il momento d'inerzia assiale di un rettangolo, calcolato rispetto all'asse x baricentrico orizzontale parallelo alla base b , si può determinare anche il momento d'inerzia assiale I_y di un rettangolo, calcolato rispetto all'asse y baricentrico verticale e parallelo all'altezza h . Se si immagina di ribaltare il rettangolo e di scambiare tra di loro le due dimensioni b e h si ottiene la formula:

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

2. Calcolo del momento d'inerzia di un rettangolo rispetto a una retta r non baricentrica e coincidente con la base b (Figura 2)

Se applichiamo il teorema di trasposizione, il momento d'inerzia del rettangolo calcolato rispetto alla retta r risulta:

$$I_r = I_x + A \cdot d^2 = \frac{b \cdot h^3}{12} + b \cdot h \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{b \cdot h^3}{12} + \frac{b \cdot h^3}{4} = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

Riportiamo ora i momenti d'inerzia assiali di altre figure geometriche semplici.

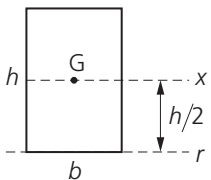
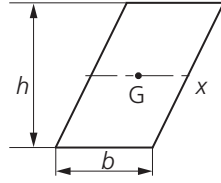


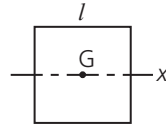
Figura 2

3. Parallelogramma avente base b e altezza h



$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

4. Quadrato di lato l



$$I_x = \frac{l^4}{12}$$

5. Triangolo di base b e altezza h

Un qualsiasi triangolo (Figura 3) può essere considerato la metà di un rettangolo avente la stessa base e la stessa altezza del triangolo stesso, per cui il suo momento d'inerzia rispetto alla retta m parallela alla base e passante a metà altezza vale la metà di quello del rettangolo. Si ha cioè:

$$I_m = \frac{b \cdot h^3}{24}$$

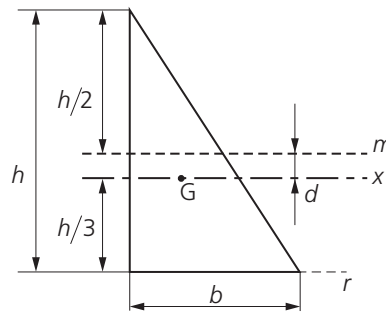


Figura 3

- a) Per ottenere la formula del momento d'inerzia del triangolo, calcolato rispetto all'asse x baricentrico e parallelo alla base b , si applica il teorema di trasposizione:

$$I_m = I_x + A \cdot d^2$$

dove:

$$d = \frac{h}{2} - \frac{h}{3} = \frac{h}{6}$$

da cui si ricava:

$$I_x = I_m - A \cdot d^2 = \frac{b \cdot h^3}{24} - \frac{b \cdot h}{2} \cdot \left(\frac{h}{6}\right)^2 = \frac{b \cdot h^3}{36}$$

- b) Anche il momento d'inerzia del triangolo, calcolato rispetto alla retta r coincidente con la base b , si calcola applicando il teorema di trasposizione. Si ottiene:

$$I_r = I_x + A \cdot d^2 = \frac{b \cdot h^3}{36} + \frac{b \cdot h}{2} \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

6. Cerchio

Per la ricerca dei momenti quadratici di un *cerchio* occorre prima conoscere il momento d'inerzia polare di un triangolo isoscele, calcolato rispetto al vertice V opposto alla base: quest'ultimo si trova con la formula $I_V = I_x + I_y$, in cui I_x è il momento d'inerzia assiale calcolato rispetto alla retta x (parallela alla base) e I_y è il momento d'inerzia assiale calcolato rispetto alla retta y. Le due rette sono tra di loro perpendicolari; entrambe passano per il vertice V.

Per un *triangolo isoscele* di base b e altezza h il momento d'inerzia polare, calcolato rispetto al vertice V, risulta:

$$I_V = I_x + I_y = \frac{b \cdot h^3}{4} + \frac{h \cdot b^3}{48}$$

- a) Per ottenere allora il *momento d'inerzia polare di un cerchio* di centro O e di raggio r si suddivide la figura in un numero n di settori circolari di ampiezza molto ridotta, in modo che ognuno di essi possa essere considerato come un triangolo isoscele avente l'altezza $h \approx r$ e la base $b = 2\pi r/n$ (Figura 4).

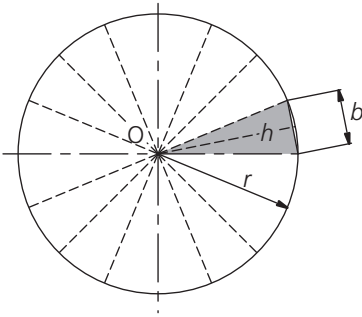


Figura 4

Il vertice di ogni triangolo coincide con il centro O del cerchio e quindi il *momento d'inerzia polare I_O del cerchio*, calcolato rispetto al centro O, si trova sommando i momenti d'inerzia polari I_V dei vari triangoli. Dato che ora è noto il momento d'inerzia polare di un triangolo calcolato rispetto al vertice V e cioè:

$$I_V = \frac{b \cdot h^3}{4} + \frac{h \cdot b^3}{48}$$

e dato che il termine $h \cdot b^3/48$ è numericamente trascurabile rispetto a $bh^3/4$, si ottiene:

$$I_O = n \cdot I_V = n \cdot \frac{b \cdot h^3}{4} = n \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi \cdot r}{n} \cdot r^3 = \frac{\pi \cdot r^4}{2}$$

Esprimendo il momento quadratico I_O in funzione del diametro del cerchio ($d = 2r$), si ha:

$$I_O = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^4 = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

e, in forma approssimata: $I_O \approx 0,1 d^4$.

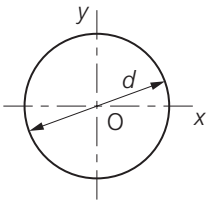


Figura 5

- b) Calcolo del *momento d'inerzia assiale di un cerchio* rispetto a due rette diametrali x, y perpendicolari tra loro (Figura 5).

Essendo evidentemente uguali i momenti d'inerzia assiali I_x e I_y di un cerchio, calcolati rispetto alle rette x e y tra loro perpendicolari e passanti per il centro O, si può scrivere:

$$I_O = I_x + I_y = 2I_x = 2I_y \rightarrow I_x = I_y = \frac{I_O}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$$

In forma approssimata si ha:

$$I_x = I_y \approx 0,05 d^4$$