

## 1 Travature reticolari

Le *travature reticolari* sono strutture costituite da un certo numero di aste collegate tra loro alle estremità in modo tale da rendere indeformabile l'intera struttura.

I punti di collegamento tra le aste, detti *nodi*, sono in pratica realizzati mediante saldature o bulloni, ma nello studio teorico semplificato di una travatura reticolare si suppone che in ogni nodo sia presente una cerniera. In tal modo l'asta, se non fosse vincolata anche all'estremità opposta, potrebbe ruotare attorno a quel nodo. Inoltre si ipotizza che le forze esterne siano unicamente applicate sui nodi e che sia trascurabile il peso proprio delle aste.

Se l'entità del peso proprio delle aste non fosse trascurabile, il carico uniformemente distribuito sull'intera lunghezza di ogni asta, cioè il peso  $P$  dell'asta stessa, dovrà essere considerato suddiviso in due parti uguali concentrate ciascuna su ciascun nodo dell'asta, in aggiunta alle forze esterne eventualmente applicate.

Queste due ipotesi semplificative, cioè le cerniere in corrispondenza dei nodi e le forze esterne applicate unicamente concentrando sui nodi stessi, permettono di considerare le aste di una struttura reticolare come aste incernierate alle due estremità e sollecitate da una sola forza agente lungo il loro asse longitudinale. Le aste risultano perciò tese quando sono soggette a uno sforzo di trazione, e in tal caso vengono chiamate *tiranti*, oppure compresse quando sono soggette a uno sforzo di compressione, e in questo caso vengono chiamate *puntoni*.

Una travatura reticolare è **isostatica** (o *strettamente indeformabile*) quando è costituita dal numero minimo di aste  $a$  con relativi nodi  $n$  in grado di assicurare l'indeformabilità della struttura ed è soddisfatta quindi la relazione:

$$a = 2n - 3$$

Per avere una struttura indeformabile occorre però che le aste siano anche distribuite in modo uniforme e disposte in modo opportuno per bloccare qualsiasi movimento della struttura.

Una travatura reticolare è **labile** quando vale la relazione:

$$a < 2n - 3$$

Una travatura di questo tipo può essere ottenuta da una travatura reticolare isostatica togliendo anche una sola asta. In tal modo la struttura diventa deformabile e quindi priva di una pratica utilizzazione.

Una travatura reticolare è **iperstatica** quando vale la relazione:

$$a > 2n - 3$$

In tal caso, a seconda del grado di iperstaticità della struttura, cioè a seconda che si tratti di una struttura una volta, due volte o tre volte iperstatica, si possono eliminare una o più aste senza che la struttura perda la propria indeformabilità.

Lo studio dell'equilibrio di una travatura reticolare isostatica deve essere effettuato in base al seguente procedimento:

1. verifica del numero delle aste ( $a = 2n - 3$ ) per controllare se la struttura è isostatica;
2. calcolo delle reazioni dei vincoli esterni;
3. determinazione dell'intensità degli sforzi che si sviluppano nelle aste.

Dopo avere eseguito la verifica del punto 1), si procede al calcolo delle reazioni vincolari del punto 2) mediante uno dei metodi analitici o grafici illustrati in

precedenza per le travi usuali applicandolo alla struttura reticolare nel suo complesso.

Il punto 3) è assai importante poiché riguarda la determinazione dell'intensità e del verso degli sforzi che si sviluppano nelle aste per effetto dei carichi esterni applicati alla struttura e delle relative reazioni vincolari. Il calcolo degli sforzi nelle aste potrebbe essere svolto con le equazioni cardinali della statica applicate ai singoli nodi della struttura, ma il procedimento sarebbe lungo e complesso. Tra i vari procedimenti grafici e analitici più comunemente utilizzati, ne illustriamo uno grafico (*metodo dell'equilibrio dei nodi*) e uno analitico (*metodo di Ritter*).

#### a) Metodo dell'equilibrio dei nodi

Il metodo dell'equilibrio dei nodi è un metodo grafico che utilizza la condizione di equilibrio del sistema di forze concorrenti in un nodo. Tale sistema è formato da una forza esterna o da una reazione vincolare e dagli sforzi delle aste che concorrono in quel nodo. Come esempio consideriamo la travatura reticolare della **Figura 1** soggetta alla sola forza  $P$  applicata nel nodo D posto al centro della distanza tra i due appoggi A e B.

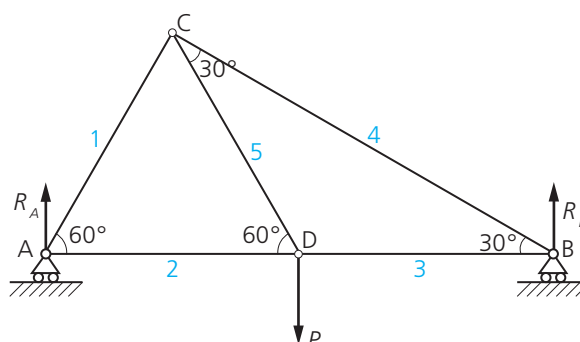


Figura 1

Essendo verificata la relazione  $a = 2n - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 5$ , la struttura è isostatica. Per ragioni di simmetria le due reazioni vincolari saranno uguali ciascuna alla metà del carico esterno  $P$ . Si avrà quindi:  $R_A = R_B = P/2$ . Ogni nodo è in equilibrio per cui la forza nota agente in un nodo può essere scomposta nella direzione delle aste che ivi si incontrano.

Dopo avere scelto una scala delle forze si può iniziare il calcolo degli sforzi nelle aste: per evitare problemi di indeterminazione si prende inizialmente in esame un nodo in cui si incontrano due sole aste. Si inizia, ad esempio, con l'equilibrio del nodo A dove le incognite sono due ( $S_1$  e  $S_2$ ): si costruisce il triangolo delle forze tracciando dalle estremità del vettore della reazione  $R_A$ , nota, le parallele alle aste 1 e 2 nell'ordine con il quale vengono incontrate ruotando in senso orario attorno al nodo (e cioè: asta 1 e, in successione, asta 2). Le lunghezze dei due lati del triangolo così ottenute rappresentano, nella scala delle forze, le intensità degli sforzi  $S_1$  e  $S_2$  agenti lungo le aste 1 e 2 (**Figura 2**).

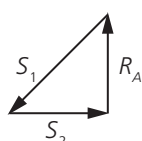


Figura 2  
Equilibrio nodo A.

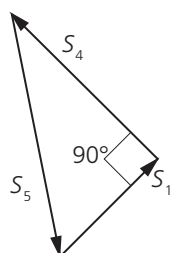
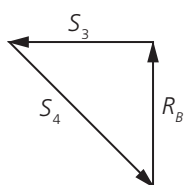


Figura 3  
Equilibrio nodo C.

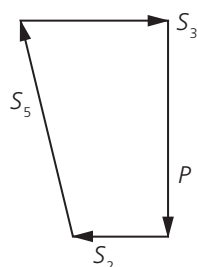
I versi degli sforzi  $S_1$  e  $S_2$  trovati nella chiusura del triangolo ci permettono di stabilire che l'asta 1 è un puntone (lo sforzo  $S_1$  è diretto verso il nodo), mentre l'asta 2 è un tirante (lo sforzo  $S_2$  si allontana dal nodo).

Passando ora al nodo C, lo sforzo  $S_1$  viene riportato nel poligono d'equilibrio con la stessa intensità, ma con il verso opposto in quanto l'asta 1 funziona da puntone su entrambe le estremità. Il poligono di equilibrio è tracciato nella **Figura 3** dalla quale si deduce che l'asta 4 è un puntone, mentre l'asta 5 è un tirante.

Si traccia poi il triangolo di equilibrio del nodo B ripetendo il procedimento se-



**Figura 4**  
Equilibrio nodo B.



**Figura 5**  
Equilibrio nodo D.

guito per il nodo A. Nel nodo B l'unica incognita è lo sforzo  $S_3$ , mentre  $R_B$  e  $S_4$  (con il verso cambiato) sono noti.

Il triangolo di equilibrio è tracciato nella **Figura 4** da cui risulta che l'asta 3 è un tirante.

Per un controllo della correttezza del procedimento grafico seguito riportiamo nella **Figura 5** il poligono di equilibrio del nodo D, in cui sono già noti gli sforzi nelle tre aste che vi concorrono.

Calcolate in tal modo, secondo una scala prefissata, le intensità degli sforzi nelle singole aste, si può eseguire il loro dimensionamento mediante i criteri che saranno enunciati nel secondo volume di questo Corso.

### Osservazione

Il metodo dell'equilibrio dei nodi viene impiegato costruendo un poligono delle forze per ciascun nodo della struttura; si può allora notare che lo sforzo relativo a ogni asta è presente con sensi opposti in due diversi poligoni dal momento che ogni asta collega due nodi.

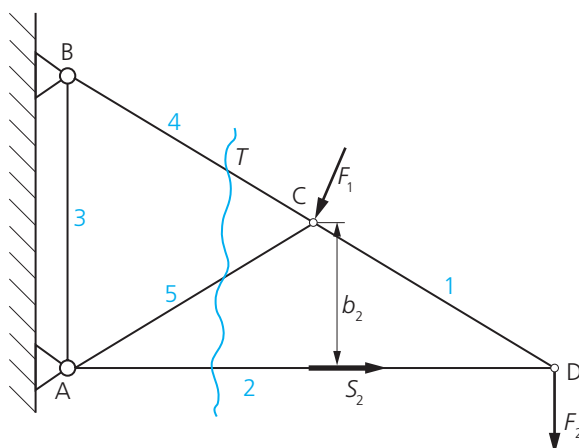
Per semplificare il procedimento si possono riunire i vari poligoni facendo coincidere i lati corrispondenti a una stessa asta, in modo tale che le varie forze compaiano una volta sola. Si ottiene così una sola figura detta *diagramma cremoniano*. Ogni lato di questo diagramma dovrebbe avere però due frecce poiché rappresenta lo sforzo in un'asta relativo a due diversi nodi. Per indicare chiaramente se un'asta è un tirante o un puntone si conviene di rappresentare con una linea sottile i tiranti e con una linea grossa i puntoni.

Dopo il calcolo delle reazioni dei vincoli esterni, la *costruzione del diagramma cremoniano* viene realizzata riportando nello stesso ordine i vettori rappresentativi delle forze esterne e delle reazioni vincolari incontrate durante il percorso compiuto ruotando attorno alla struttura in senso prestabilito (in senso orario nel nostro caso). Si passa poi alla costruzione dei poligoni di equilibrio dei vari nodi tracciando i lati paralleli alle aste nello stesso ordine in cui esse sono incontrate, girando attorno al nodo nello stesso senso di rotazione scelto prima per l'intera struttura.

### b) Metodo di Ritter

Il metodo di Ritter è un metodo analitico che utilizza l'equilibrio dei momenti di tutte le forze esterne e interne agenti sulla travatura rispetto a un punto arbitrario del piano. Si tratta di un metodo pratico e utile quando si deve calcolare lo sforzo in un'asta singola.

Nella travatura reticolare della **Figura 6** applichiamo il metodo di Ritter operando una sezione  $T$  che tagli tre aste non concorrenti nel medesimo punto, dividendo così la struttura in due parti.



**Figura 6**

Ciascuno dei due tronconi in cui è stata divisa la struttura sarà in equilibrio solo se trovano applicazione certe condizioni.

Prendiamo in esame il troncone a destra della sezione  $T$ . L'equilibrio di questo troncone viene rispettato se è nulla la somma dei momenti, calcolati rispetto a un punto d'incontro di due qualsiasi delle tre aste tagliate, delle seguenti forze:

1. le forze esterne  $F_1$  e  $F_2$  applicate sui nodi appartenenti a tale troncone;
2. le forze  $S_2$ ,  $S_5$  e  $S_4$  agenti rispettivamente lungo le aste 2, 5 e 4, ossia quelle che sono state intersecate dalla sezione  $T$ .

In tal modo gli sforzi di queste due aste avranno un momento nullo rispetto a quel punto in quanto quest'ultimo è situato sulle loro rette d'azione e dall'equazione di equilibrio si potrà quindi facilmente calcolare lo sforzo agente lungo la terza asta.

Scegliendo allora come polo dei momenti il punto  $C$  della figura, si annullano i momenti degli sforzi  $S_4$  e  $S_5$  e l'equazione di equilibrio diventa:  $M - b_2 S_2 = 0 \rightarrow S_2 = M/b_2$  in cui  $b_2$  è il braccio dello sforzo  $S_2$  rispetto a  $C$ , mentre  $M$  è il momento delle forze esterne, anch'esso calcolato rispetto a  $C$ .

Lo sforzo  $S_2$  così trovato dovrà produrre un momento opposto rispetto al momento orario  $M$  per cui la forza  $S_2$  sarà rivolta verso il nodo  $D$ : l'asta 2 è quindi un puntone.

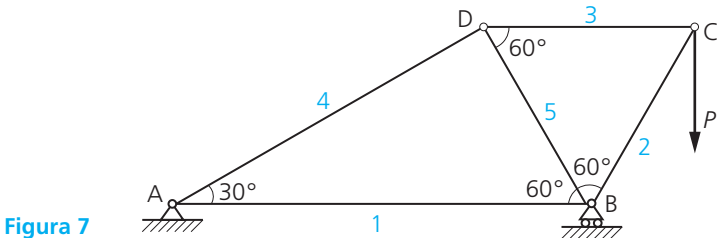
Con analogo procedimento si possono calcolare gli sforzi  $S_4$  e  $S_5$  agenti lungo le aste 4 e 5 considerando come polo dei momenti il nodo  $A$  per il calcolo di  $S_4$  e il nodo  $D$  per calcolare  $S_5$ .

Osserviamo infine che il metodo di Ritter non è utilizzabile quando due delle tre aste tagliate dalla sezione sono parallele: in tal caso, infatti, esse si incontrano all'infinito; il braccio dello sforzo incognito diventa anch'esso infinito, quindi non è calcolabile.

# ESERCIZI SVOLTI

**Argomenti:**  
A Strutture reticolari

**A Esercizio 1** Determinare graficamente gli sforzi nelle aste della struttura reticolare rappresentata nella **Figura 7**, soggetta al carico verticale  $P = 1500\text{ N}$  e avente l'asta 1 lunga 2,8 metri.

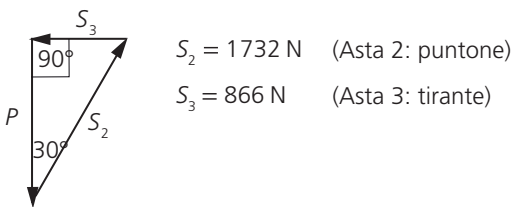


**SOLUZIONE** La struttura è isostatica poiché è verificata la relazione  $a = 2n - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 5$  (numero delle aste). Calcoliamo analiticamente le due reazioni vincolari  $R_A$  e  $R_B$  imponendo l'equilibrio della struttura alla rotazione rispettivamente prima attorno al nodo A e poi al nodo B. Si ha:

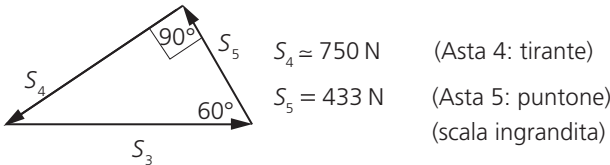
$$1500 \cdot (2,8 + 0,7) - R_B \cdot 2,8 = 0 \rightarrow R_B = 1875\text{ N}$$
$$R_A \cdot 2,8 + 1500 \cdot 0,7 = 0 \rightarrow R_A = -375\text{ N}$$

Il valore negativo della reazione  $R_A$  indica che essa è rivolta verso il basso, cioè in direzione contraria a quella ipotizzata nella condizione di equilibrio. Calcoliamo ora gli sforzi nelle aste con il metodo dell'equilibrio dei nodi costruendo il poligono di equilibrio per ogni nodo, secondo un'opportuna scala, per stabilire anche il tipo delle singole aste (puntone o tirante). Iniziamo dal nodo C in cui concorrono due sole aste.

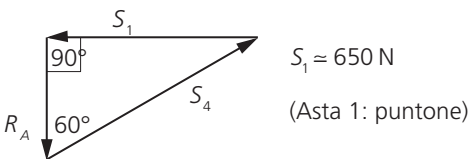
Nodo C



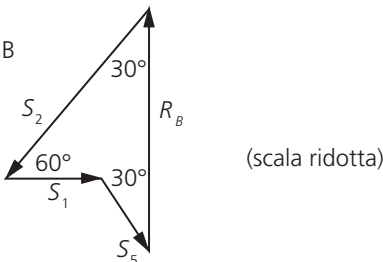
Nodo D



Nodo A



Nodo B



Gli sforzi nelle aste sono già tutti noti, quindi il poligono di equilibrio del nodo B serve solo per un controllo della correttezza del procedimento grafico. La chiusura del poligono indica che tale procedimento è corretto.

### A Esercizio 2

Determinare con il metodo analitico di Ritter gli sforzi nelle aste 4, 5, 6 della travatura reticolare rappresentata nella **Figura 8** ( $BE = EC = 1,1$  m).

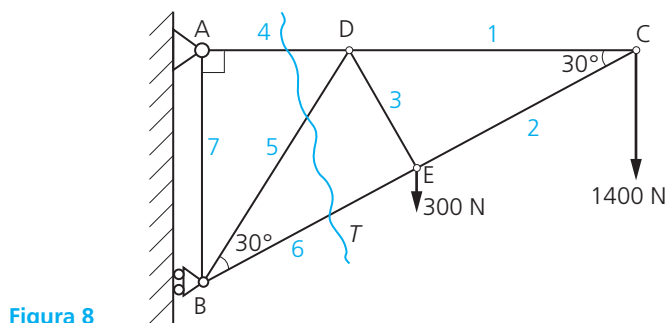


Figura 8

### SOLUZIONE

La relazione  $a = 2n - 3 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$  è soddisfatta, quindi la struttura è isostatica. Eseguiamo ora la sezione  $T$  tagliando le tre aste 4, 5, 6 e calcoliamo lo sforzo nell'asta 4. Considerato come centro di rotazione il punto B d'incontro delle altre due aste 5 e 6, per la condizione di equilibrio alla rotazione della parte destra della struttura si ha:

$$1400 \cdot (BC \cdot \cos 30^\circ) + 300 \cdot (BE \cdot \cos 30^\circ) - S_4 \cdot AB = 0$$

da cui:

$$1400 \cdot 1,9 + 300 \cdot 0,95 - S_4 \cdot 1,1 = 0 \rightarrow S_4 = \frac{2375}{1,1} \approx 2159,1 \text{ N}$$

L'asta 4 è un tirante.

Calcoliamo ora lo sforzo nell'asta 5 considerando come centro di rotazione il nodo C.

La condizione di equilibrio è:

$$-300 \cdot (EC \cdot \cos 30^\circ) + S_5 \cdot (BC \cdot \sin 30^\circ) = 0$$

da cui:

$$-300 \cdot 0,952 + S_5 \cdot 1,1 = 0 \rightarrow S_5 = \frac{285,6}{1,1} \approx 259,6 \text{ N}$$

L'asta 5 è un puntone.

Calcoliamo ora lo sforzo nell'asta 6 considerando come centro di rotazione il nodo D.

La condizione di equilibrio è:

$$1400 \cdot (EC / \cos 30^\circ) + 300 \cdot [(EC \cdot \tan 30^\circ) \cdot \cos 60^\circ] - S_6 \cdot DE = 0$$

dove:

$$DE = EC \cdot \tan 30^\circ$$

Sostituendo i valori numerici noti, dalla condizione di equilibrio si ricava lo sforzo nell'asta 6:

$$S_6 = \frac{1873,495}{0,6347} \approx 2951,8 \text{ N}$$

L'asta 6 è un puntone.

A completamento dell'esercizio riportiamo le reazioni vincolari della struttura e i valori degli sforzi nelle aste rimanenti calcolati con il metodo dell'equilibrio dei nodi.

$$R_A \approx 2748,5 \text{ N}; R_B = 2685,8 \text{ N}; S_1 = 2424,8 \text{ N (tirante)}; S_2 = 2800 \text{ N (puntone)};$$

$$S_3 = 259,8 \text{ N (tirante)}; S_7 = 1700,7 \text{ N (tirante)}.$$

## VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

**Riconoscere se le seguenti affermazioni sono vere (V) o false (F).**

1. Una travatura reticolare labile è costituita da un numero di aste almeno pari al doppio del numero di nodi.
2. Nella risoluzione delle travature reticolari il metodo di Ritter non è applicabile quando due delle tre aste tagliate dalla sezione sono parallele.

☐ V ☐ F

☐ V ☐ F

## QUESITI

**Individuare la risposta esatta ai seguenti quesiti a risposta multipla.**

1. Una travatura reticolare, dotata di un numero  $a$  di aste con un numero  $n$  di nodi, è iperstatica quando vale la relazione:

☐ a  $a = 2n - 3$

☐ b  $a > 2n - 3$

☐ c  $a < 2n - 3$



# ESERCIZI PROPOSTI

**Argomenti:**  
A Strutture reticolari

**A | Esercizio 1** Calcolare le reazioni vincolari e gli sforzi  $S$  nelle aste della struttura reticolare di **Figura 9** soggetta alle forze  $F_1 = 1000\text{ N}$  e  $F_2 = 2000\text{ N}$ , essendo noti inoltre  $AC = CE = 2\text{ m}$ .

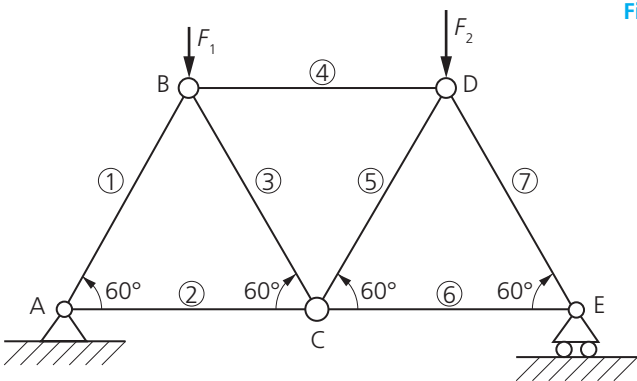


Figura 9

[ $R_{Ax} = 0$ ;  $R_{Ay} = 1250\text{ N}$ ;  $R_E = 1750\text{ N}$ ;  $S_1 \approx 1443,4\text{ N}$  (puntone);  
 $S_2 \approx 721,7\text{ N}$  (tirante);  $S_3 = 288,7\text{ N}$  (tirante);  $S_4 \approx 866\text{ N}$  (puntone);  
 $S_5 = 288,7\text{ N}$  (puntone);  $S_6 \approx 1010,4\text{ N}$  (tirante);  $S_7 \approx 2020,8\text{ N}$  (puntone)]

**A | Esercizio 2** Determinare le reazioni vincolari e gli sforzi  $S$  nelle aste della travatura reticolare di **Figura 10**, noti:  $P_1 = 3000\text{ N}$ ,  $P_2 = 2000\text{ N}$ ,  $AD = DC = 1\text{ m}$ ,  $BE = EC$ .

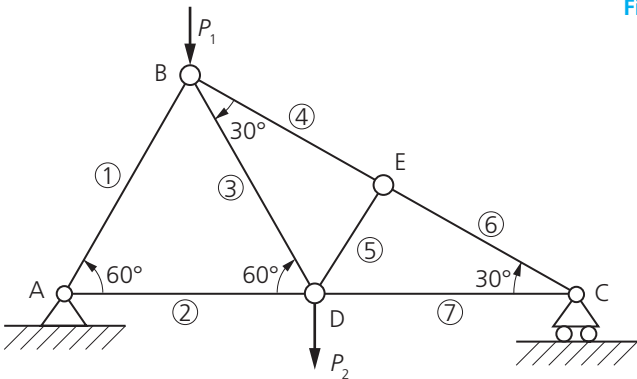


Figura 10

[ $R_{Ax} = 0$ ;  $R_{Ay} = 3250\text{ N}$ ;  $R_C = 1750\text{ N}$ ;  $S_1 \approx 3753\text{ N}$  (puntone);  
 $S_2 \approx 1876\text{ N}$  (tirante);  $S_3 \approx 2309\text{ N}$  (tirante);  $S_4 = 3500\text{ N}$  (puntone);  
 $S_5 = 0$  (scarica);  $S_6 = 3500\text{ N}$  (puntone);  $S_7 = 3031\text{ N}$  (tirante)]