

Dimostrazione del teorema di trasposizione del momento d'inerzia assiale (teorema di Huygens-Steiner):

$$I_r = I_x + A \cdot d^2$$

Con riferimento alla **Figura 1**, detta y'_i la distanza di ogni area elementare a_i dalla retta r e d la distanza tra la retta baricentrica x e la retta r , risulta:

$$y'_i = d \pm y_i \quad (1)$$

dove con y_i si sono indicate le distanze riferite alla retta baricentrica x .

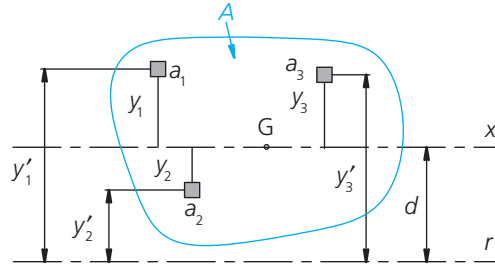


Figura 1

Elevando al quadrato entrambi i membri della (1) si ottiene:

$$y_i'^2 = (d \pm y_i)^2$$

ovvero, sviluppando il quadrato del binomio:

$$y_i'^2 = d^2 \pm 2 \cdot d \cdot y_i + y_i^2 \quad (2)$$

Il momento d'inerzia assiale di superficie I_r calcolato rispetto alla retta r vale:

$$I_r = \sum_i (a_i \cdot y_i'^2) \quad (3)$$

Sostituendo la (2) nella (3) si ricava:

$$I_r = \sum_i (a_i \cdot y_i'^2) = \sum_i (a_i \cdot d^2) \pm \sum_i (2 \cdot a_i \cdot d \cdot y_i) + \sum_i (a_i \cdot y_i^2)$$

Il primo termine che compare al secondo membro vale:

$$\sum_i (a_i \cdot d^2) = d^2 \cdot \sum_i (a_i) = d^2 \cdot A$$

dove con A si è indicata l'area della superficie.

Il secondo termine vale:

$$\pm \sum_i (2 \cdot a_i \cdot d \cdot y_i) = \pm 2 \cdot d \cdot \sum_i (a_i \cdot y_i)$$

La relazione:

$$\sum_i (a_i \cdot y_i)$$

rappresenta il momento statico della superficie calcolato rispetto alla retta baricentrica x . Ma, com'è noto, il momento statico di una superficie, calcolato rispetto alla retta baricentrica, è nullo; pertanto il secondo termine è nullo. Porremo quindi:

$$\pm 2 \cdot d \cdot \sum_i (a_i \cdot y_i) = 0$$

Per quanto riguarda il terzo termine, esso vale:

$$\sum_i (a_i \cdot y_i^2) = I_x$$

ovvero è il momento d'inerzia calcolato rispetto alla retta baricentrica x .
Risulta quindi:

$$I_r = I_x + A \cdot d^2$$

che è l'espressione analitica del teorema di trasposizione del momento d'inerzia assiale.