

## Molla a lamina a pianta triangolare: dimostrazioni delle formule della freccia $f$ :

$$1) f = \frac{F \cdot l^3}{2 \cdot E \cdot I_n}; \quad 2) f = \frac{\sigma_{adm} \cdot l^2}{E \cdot h}$$

### 1. Dimostrazione della formula della freccia $f = \frac{F \cdot l^3}{2 \cdot E \cdot I_n}$

Vogliamo dimostrare che la freccia  $f$  che si manifesta in corrispondenza del carico  $F$  applicato all'estremità libera di una molla a lamina a pianta triangolare vale:

$$f = \frac{F \cdot l^3}{2 \cdot E \cdot I_n}$$

dove con  $E$  si è indicato il modulo di elasticità normale (modulo di Young) e con  $I_n$  il momento quadratico di superficie della sezione resistente, momento calcolato rispetto all'asse neutro.

Con riferimento alla **Figura 1**, dove è rappresentata la *linea elastica* (o *deformata elastica*) della molla, s'è detto nel secondo volume di questo Corso che il valore di un generico raggio di curvatura  $r$  di questa linea è:

$$r = \frac{E \cdot I_n}{M_f} \quad (1)$$

Nell'Approfondimento 7 nella parte digitale del testo, si è dimostrato che la molla a lamina a pianta triangolare è un solido a uniforme resistenza alla flessione. Ciò significa che in ogni sezione si ha la stessa tensione normale massima  $\sigma_{max}$ ; ovvero, per tutte le sezioni è verificata la condizione:

$$\sigma_{max} = \frac{M_f \cdot y_{max}}{I_n} = \text{cost.} \quad (2)$$

Analizziamo l'espressione appena scritta.

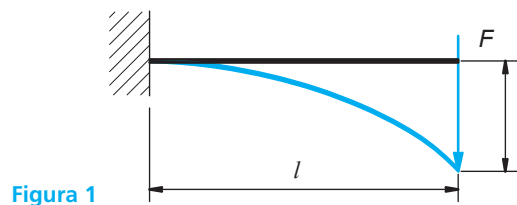


Figura 1

Dal momento che la lamina è a spessore costante ( $h = \text{cost.}$ ), in tutte le sezioni è:

$$y_{max} = \text{cost.} = \frac{h}{2}$$

La (2) allora può scriversi:

$$\frac{M_f}{I_n} = \text{cost.}$$

A questo punto possiamo affermare che, dall'analisi dell'espressione (1):

$$r = \frac{E \cdot I_n}{M_f}$$

risulta che il raggio di curvatura  $r$  della deformata elastica della molla a lamina a pianta triangolare è costante. Infatti si ha:

$$-E = \text{cost.};$$

$$-\frac{M_f}{I_n} = \text{cost. per quanto dimostrato in precedenza, e quindi, ovviamente, anche}$$

$$\frac{I_n}{M_f} = \text{cost.}$$

In altre parole, se  $r$  è costante, ciò significa che la deformata elastica di una molla a lamina a pianta triangolare è un arco di circonferenza.

Il momento flettente che agisce all'incastro vale:

$$M_{f\max} = F \cdot l \quad (3)$$

Se inseriamo questa espressione nella relazione (1) otteniamo, per la sezione d'incastro:

$$r = \frac{E \cdot I_n}{M_{f\max}} = \frac{E \cdot I_n}{F \cdot l} \quad (4)$$

È opportuno ora ricordare le seguenti proprietà:

– in una circonferenza, l'angolo alla circonferenza vale la metà dell'angolo al centro che insiste sullo stesso arco. Quindi, con riferimento alla [Figura 2](#), l'angolo  $\widehat{CAB} \left( = \frac{\alpha}{2} \right)$ , angolo alla circonferenza che insiste sull'arco AC, vale la metà dell'angolo  $\widehat{AOB} (= \alpha)$ , angolo al centro della stessa circonferenza, che insiste sullo stesso arco AC;

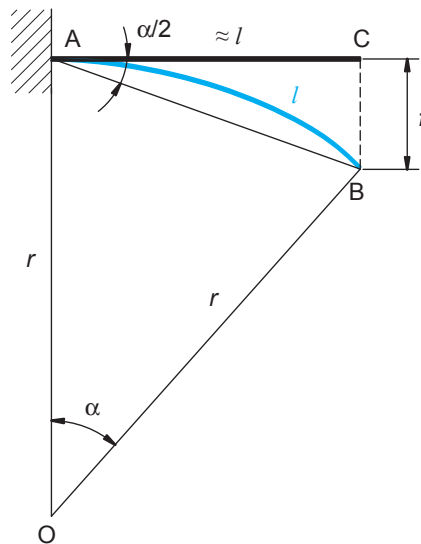


Figura 2

– nell'ambito delle piccole deformazioni è lecito porre:

$$\text{tg} \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$$

per cui l'espressione della freccia:

$$f \approx l \cdot \text{tg} \frac{\alpha}{2}$$

può anche scriversi:

$$f \approx l \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \approx l \cdot \frac{\alpha}{2}$$

Dato che è:

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

l'espressione

$$f \approx l \cdot \frac{\alpha}{2}$$

può allora scriversi:

$$f \approx l \cdot \frac{\alpha}{2} = l \cdot \frac{\frac{l}{r}}{2} = \frac{l^2}{2 \cdot r} \quad (5)$$

Se sostituiamo la (4) nella (5) otteniamo:

$$f = \frac{l^2}{2 \cdot r} = \frac{l^2}{2 \cdot \frac{E \cdot I_n}{F \cdot l}} = \frac{F \cdot l \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I_n} = \frac{F \cdot l^3}{2 \cdot E \cdot I_n} \quad (6)$$

## 2. Dimostrazione della formula della freccia $f = \frac{\sigma_{adm} \cdot l^2}{E \cdot h}$

Come si è dimostrato nella (6), la freccia  $f$  di una molla a lamina a pianta triangolare vale:

$$f = \frac{F \cdot l^3}{2 \cdot E \cdot I_n}$$

Dato che il momento d'inerzia  $I_n$  della sezione d'incastro vale:

$$I_n = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3$$

in quanto la sezione trasversale della molla è rettangolare, la (6) diviene:

$$f = \frac{F \cdot l^3}{2 \cdot E \cdot I_n} = \frac{F \cdot l^3}{2 \cdot E \cdot \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3} = \frac{6 \cdot F \cdot l^3}{E \cdot b \cdot h^3} \quad (7)$$

Detta  $F$  la forza deformante massima applicabile all'estremità libera della molla a lamina a pianta triangolare, ci proponiamo ora di ricavare un'espressione di  $F$  in funzione delle dimensioni  $b$ ,  $h$ ,  $l$  della molla e del carico unitario di sicurezza.

La relazione di progetto a flessione, relativa alla sezione d'incastro è, in base alla formula di Navier:

$$W_{f \min} = \frac{M_{f \max}}{\sigma_{adm}} \quad (7a)$$

Dato che il modulo di resistenza a flessione  $W_f$  di questa sezione, in quanto si tratta di una sezione rettangolare, vale:

$$W_f = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2$$

e il momento flettente massimo  $M_{f_{\max}}$  vale:

$$M_{f_{\max}} = F \cdot l$$

l'espressione (7a) diviene:

$$\frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2 = \frac{F \cdot l}{\sigma_{\text{adm}}}$$

Da quest'ultima relazione si ricava l'espressione della forza deformante massima applicabile all'estremità libera della molla. Essa vale:

$$F = \frac{b \cdot h^2 \cdot \sigma_{\text{adm}}}{6 \cdot l} \quad (7b)$$

Se si sostituisce l'espressione (7b) nella (7) si ottiene:

$$f = \frac{6 \cdot F \cdot l^3}{E \cdot b \cdot h^3} = \frac{6 \cdot l^3}{E \cdot b \cdot h^3} \cdot \frac{b \cdot h^2 \cdot \sigma_{\text{adm}}}{6 \cdot l} = \frac{l^2 \cdot \sigma_{\text{adm}}}{E \cdot h}$$

ovvero:

$$f = \frac{\sigma_{\text{adm}} \cdot l^2}{E \cdot h} \quad (8)$$