

## Dimostrazione della formula del rendimento del ciclo Otto:

$$\eta_{\text{Otto}} = 1 - \frac{1}{\rho_{\text{compr}}^{(k-1)}}$$

Il rendimento  $\eta$  di un ciclo termodinamico è espresso dal rapporto tra il calore utilizzato, cioè trasformato in lavoro, ovvero il calore ( $q_{\text{sup}} - q_{\text{inf}}$ ), e il calore disponibile  $q_{\text{sup}}$ , dove:

- $q_{\text{sup}}$  è il calore fornito dalla *sorgente superiore*, cioè dalla sorgente termica a temperatura più elevata;
- $q_{\text{inf}}$  è il calore ceduto alla *sorgente fredda* (o *sorgente inferiore*).

Risulta cioè:

$$\eta = \frac{q_{\text{sup}} - q_{\text{inf}}}{q_{\text{sup}}} = 1 - \frac{q_{\text{inf}}}{q_{\text{sup}}} \quad (1)$$

Se prendiamo in considerazione il ciclo Otto, possiamo affermare che, per quanto riguarda la trasformazione isocora 2-3, vale la relazione:

$$q_{\text{sup}} = c_v \cdot (T_3 - T_2) \quad \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (2)$$

Analogamente, per la trasformazione isocora 4-1 si ha:

$$q_{\text{inf}} = c_v \cdot (T_4 - T_1) \quad \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (3)$$

L'espressione (1) può allora scriversi:

$$\eta_{\text{Otto}} = 1 - \frac{q_{\text{inf}}}{q_{\text{sup}}} = 1 - \frac{c_v \cdot (T_4 - T_1)}{c_v \cdot (T_3 - T_2)} = 1 - \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)} \quad (4)$$

D'altra parte, per quanto riguarda la trasformazione adiabatica 1-2 di compressione vale la relazione:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{k-1} \quad (5)$$

dove:  $k = \frac{c_p}{c_v}$ ; analogamente, per la trasformazione adiabatica 3-4 di espansione si ha:

$$\frac{T_3}{T_4} = \left( \frac{v_4}{v_3} \right)^{k-1} \quad (6)$$

Dato che è:  $v_4 = v_1$  e:  $v_3 = v_2$ , si ha:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{k-1} \quad (7)$$

Dal momento che è:

$$\frac{v_1}{v_2} = \rho_{\text{compr}}$$

dove  $\rho_{\text{compr}}$  è il rapporto volumetrico di compressione, ne consegue:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = \rho_{\text{compr}}^{k-1} \quad (8)$$

L'espressione (4) può anche assumere la forma seguente, utile per i calcoli successivi:

$$\eta_{\text{Otto}} = 1 - \frac{T_1 \cdot \left( \frac{T_4}{T_1} - 1 \right)}{T_2 \cdot \left( \frac{T_3}{T_2} - 1 \right)} \quad (9)$$

L'espressione (7) può scriversi a sua volta:

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} \quad (10)$$

e di conseguenza la relazione (9) diventa:

$$\eta_{\text{Otto}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad (11)$$

D'altra parte l'espressione (8) può anche scriversi:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\rho_{\text{compr}}^{k-1}} \quad (12)$$

Pertanto la relazione (11) diviene:

$$\eta_{\text{Otto}} = 1 - \frac{1}{\rho_{\text{compr}}^{k-1}} \quad (13)$$