

Dimostrazione della formula:

$$L_{\text{teor}} = \pi \cdot (r_1 + r_2) + 2 \cdot \sqrt{I_a^2 + (r_2 - r_1)^2}$$

$$\text{ovvero: } L_{\text{teor}} = 2 \cdot I_a + 1,57 \cdot (d_1 + d_2) + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4 \cdot I_a}$$

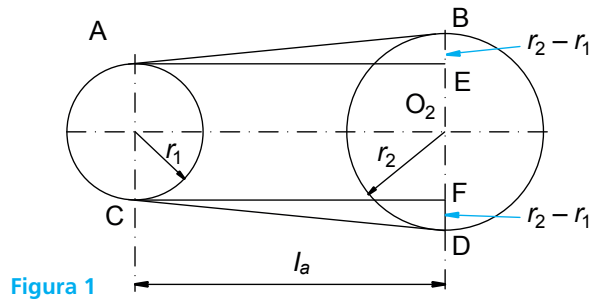


Figura 1

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABE o, indifferentemente, al triangolo rettangolo CFD di **Figura 1**. Si ottiene:

$$AB = CD = \sqrt{I_a^2 + (r_2 - r_1)^2}$$

dove:

I_a = interasse approssimato;

r_1, r_2 = raggi delle pulegge su cui è avvolta la cinghia, con l'ipotesi di ritenere trascurabile lo spessore della cinghia.

Detta L_{teor} la lunghezza teorica approssimata della cinghia, essa vale:

$$L_{\text{teor}} = \pi \cdot r_1 + \pi \cdot r_2 + 2 \cdot \sqrt{I_a^2 + (r_2 - r_1)^2}$$

cioè:

$$L_{\text{teor}} = \pi \cdot (r_1 + r_2) + 2 \cdot \sqrt{I_a^2 + (r_2 - r_1)^2} \quad (1)$$

Consideriamo separatamente il termine: $2 \cdot \sqrt{I_a^2 + (r_2 - r_1)^2}$

Esso può anche scriversi:

$$2 \cdot \left[I_a^2 + (r_2 - r_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

Dato che:

$$d_1 = 2 r_1$$

e:

$$d_2 = 2 r_2$$

sono i diametri delle pulegge su cui è avvolta la cinghia, la (2) diviene:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left[I_a^2 + \left(\frac{d_2}{2} - \frac{d_1}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} &= 2 \cdot \left[I_a^2 + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= 2 \cdot \left[\frac{4I_a^2 + (d_2 - d_1)^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}} = \left\{ 4I_a^2 \cdot \left[1 + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4I_a^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Quest'ultima espressione può anche scriversi:

$$2I_a \cdot \left[1 + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4I_a^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Sviluppiamo in serie di Taylor l'espressione:

$$\left[1 + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4I_a^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

La serie di Taylor, limitata ai primi due termini, vale:

$$(1 + x)^a = 1 + a \cdot x$$

Se si pone:

$$x = \frac{(d_2 - d_1)^2}{4I_a^2} \quad \text{e} \quad a = \frac{1}{2}$$

la (4) diviene:

$$\left[1 + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4I_a^2} \right]^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(d_2 - d_1)^2}{4I_a^2} = 1 + \frac{(d_2 - d_1)^2}{8I_a^2} \quad (5)$$

Se sostituiamo l'espressione (5) nella (3) abbiamo:

$$2I_a \cdot \left[1 + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4I_a^2} \right]^{\frac{1}{2}} = 2I_a \cdot \left[1 + \frac{(d_2 - d_1)^2}{8I_a^2} \right]$$

ovvero:

$$2I_a + 2I_a \cdot \frac{(d_2 - d_1)^2}{8I_a^2} = 2I_a + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4I_a} \quad (6)$$

Se sostituiamo l'espressione (6) nella (1) ricaviamo infine:

$$L_{\text{teor}} = \pi \cdot (r_1 + r_2) + 2 \cdot \sqrt{I_a^2 + (r_2 - r_1)^2} = \pi \cdot (r_1 + r_2) + 2I_a + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4I_a}$$

che può anche scriversi:

$$\begin{aligned} L_{\text{teor}} &= \pi \cdot (r_1 + r_2) + 2 \cdot \sqrt{I_a^2 + (r_2 - r_1)^2} = \pi \cdot \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right) + 2I_a + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4I_a} = \\ &= 2I_a + 1,57 \cdot (d_1 + d_2) + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4I_a} \end{aligned}$$

Risulta perciò:

$$L_{\text{teor}} = \pi \cdot (r_1 + r_2) + 2 \cdot \sqrt{I_a^2 + (r_2 - r_1)^2} = 2I_a + 1,57 \cdot (d_1 + d_2) + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4I_a}$$